ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА» (СПбГУТ)

С. А. Владимиров

ТЕОРИЯ, СИСТЕМЫ И УСТРОЙСТВА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Практикум

СПб ГУТ)))

Санкт-Петербург
2020

УДК XXX.XXX.X (XXX)
ББК XX.XXX.X xXX
В 57

Рецензент
— —

Рекомендован к печати редакционно-издательским советом СПбГУТ

Владимиров, С. А.
В 57 Теория, системы и устройства передачи данных : практикум / С. А. Владимиров ; СПбГУТ. — СПб, 2020. — 46 с.

Практикум знакомит студентов с теорией и методами расчетов параметров и технических характеристик в системах передачи данных, применяемыми при моделировании каналов и устройств. Предоставляет возможность получения опыта практических расчетов, анализа полученных результатов и выбора наилучшего решения в поставленных коммуникационных задачах. Представленный материал служит справочным и методическим пособием при выполнении практических работ по дисциплине «Теория, системы и устройства передачи данных».

Предназначен для студентов, обучающихся по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

УДК XXX.XXX.X (XXX)
ББК XX.XXX.X xXX

Содержание

Практическая работа 1

Определение энтропии источника сообщений и необходимой пропускной способности канала передачи данных

1.1. Цели работы

Научиться определять энтропию источника сообщений для одномерных случаев случайной величины, имеющих разные законы распределения. Научиться моделировать источники одномерных временных сигналов в соответствии с заданным законом распределения случайной величины и выполнять расчет параметров для решения задачи нахождения информационной энтропии. Научиться находить по рассчитанным параметрам диапазон значений необходимой пропускной способности канала передачи данных.

1.2. Теоретические сведения

1.2.1. Понятие случайной величины

Рассматривая методы и модели в теории и технике связи, можно заметить, что в большинстве их лежит представление сигналов и шумов, включая сам процесс передачи сигналов, в виде случайного, развивающегося во времени процесса. Слово «случайный» отражает свойство сигнала или параметра в том, что предопределить заранее точное протекание процесса невозможно. Типичным примером случайного процесса может служить напряжение от некоторого датчика, наблюдаемое на входе приёмника системы передачи информации. Выполняя слежение за значением напряжения в конкретный заданный момент времени, нельзя точно предсказать, каково будет его значение наперед, например, через минуту. Это объясняется тем, что параметры такого сигнала (при гармоническом сигнале параметрами бывают обычно амплитуда, частота и начальная фаза) изменяются случайным образом из-за стохастической природы исходного сообщения и среды наблюдения или передачи. Кроме того, в процессе самой передачи информационные сигналы подвергается воздействию случайных шумов и помех, например таких, как электрические разряды в атмосфере, помехи от электротранспорта и линий электропередачи, помехи от радиостанций и т.д. При оценках нагрузки в системах передачи данных пользуются понятием потока вызовов — это такая последовательность однородных событий, которые наступают через некоторые интервалы времени. Они бывают детерминированными и случайными. Поэтому в методах расчета и моделях систем передачи данных, шумы и помехи, а также многие сигналы и потоки вызовов рассматривают как случайные процессы (СП).

Представление и задание случайного процесса

В процессе текущего наблюдения за определенным параметром источника сообщений во времени регистрируется некоторая функция времени $x(t)$, называемая реализацией СП. Параметрически зафиксированная реализация такого процесса является детерминированной функцией.

При рассмотрении мгновенных значений параметров различают непрерывные (аналоговые), дискретные и дискретно-непрерывные СП. Например непрерывным по значению параметра СП будет процесс, случайность которого проявляется в разных реализациях полученных параметров случайным образом изменяющихся от одного опыта к другому. Такая совокупность всех возможных реализаций $x_i(t),\ i = 1,2,...$ с заданной вероятностной мерой образует случайный сигнал $X(t)$. Если для множества различных реализаций, одинаковых по количеству значений случайного процесса $x(t)$, задать некоторый момент времени от начала (сечение) t_1 , то совокупность множества значений $x(t_1)$ реализаций в этот момент образует случайную величину (СВ) $X(t_1) = X_1$. Значения такой СВ заранее неизвестны, но существуют способы установить для нее некоторые характерные закономерности. А именно, определить, как часто значения СВ оказываются в некоторых пределах: $x < X_1 < x + \triangle x$. Если в N реализациях, величина параметра СВ попадает в заданный интервал n раз, то отношение $\frac{n}{N}$ называют частотой данного события. При многократных реализациях обнаруживается некоторая статистическая устойчивость, проявляющаяся в том, что при увеличении числа реализаций N частота события стремится к некоторому постоянному значению p, называемому вероятностью того, что СВ X_1 находится внутри интервала значений $x < X_1 < x + \triangle x$. При этом, все возможные значения вероятности события будут лежать в пределах $0 \leqslant p \leqslant 1$. Событие, для которого $p = 0$, называют невозможным, а при $p = 1$ — достоверным. Разбивая область значений параметра СВ на конечное число примыкающих интервалов $x_i < X_1 < x_i + \triangle x\ x_i = 0,...,L-1$, и повторяя для каждого интервала процедуру расчета вероятностей, получаем закон распределения вероятностей $p_i,\ i = 0,...L-1$ дискретной по значению параметра СВ, обозначаемой как множество элементов $x_i, p_i,\ i = 0,...,L-1$. Учитывая, что значения параметра, которые принимает СВ, являются несовместимыми событиями и в совокупности образуют полную группу событий, получаем важное свойство распределения вероятностей, называемое условием нормирования:

$$\sum_{i=0}^{L-1} p_i = 1. \tag{1.1}$$

С математической точки зрения дискретные по значению параметра СП характеризуются ступенчатыми функциями распределения вероятностей или разрывными функциями плотности вероятности (ФПВ), содержащими дельта-функции. Непрерывные по значению параметра СП характеризуются непрерывными ФПВ, интегрируемыми по Риману. Дискретно-непрерывные по значению параметра СП обладают функциями распределения вероятностей и ФПВ, имеющими обе составляющие.

1.2.2. Функция распределения и функция плотности вероятности

При любом практическом применении методов и моделей оценок случайных величин очень важным моментом в инженерной практике является знание закона распределения вероятностей. Реализации источников данных, получаемые в ходе какого-либо эксперимента или измерения, в общем случае представлены только законом распределения своих значений. Поэтому любая обработка полученных данных должна предполагать в ходе своего проведения определение закона распределения случайной величины. Попытка применить методы анализа результатов, которые предполагают конкретный закон распределения вероятностей при условиях, когда реальное распределение отличается от гипотетического, является самой распространенной на практике ошибкой, которая часто приводит к весьма значимым материальным потерям и большим затратам времени.

Теория моделирования предлагает к использованию достаточно много подходов рассмотрения сигналов, как прямых представителей определенных моделей случайных процессов. Для векторных или многопараметрических случайных процессов, к которым принадлежат и большинство сигналов систем передачи данных, их полным описанием будет последовательность функций распределения вероятностей (ФРВ) $F_n(\vec{x_n},\vec{t_n}),\ n=1,2,...,\infty$:

- одномерных
$$F_1(x_1,t_1)=p\{X(t_1)\leqslant x_1\};$$
- двумерных
$$F_2(x_1,t_1;x_2,t_2)=p\{X(t_1)\leqslant x_1;X(t_2)\leqslant x_2\};$$
- n-мерных
$$F_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)=p\{X(t_1)\leqslant x_1;X(t_2)\leqslant x_2;...;X(t_n)\leqslant x_n\}.$$

$\vec{x_n}=(x_1,x_2,...,x_n),\ \vec{t_n}=(t_1,t_2,...,t_n)$ — вектор-строка значений параметра и времени; $p(X(t_i)\leqslant x_i,\ n=1,2,...,\infty)$ — вероятность наступления i-го события. *Функцией распределения вероятностей* случайной величины называется функция, определяющая вероятность того, что в результате эксперимента случайная величина примет значение, меньшее x_i. С ее помощью можно определить вероятность наступления события с величиной параметра в интервале $\triangle x$.

Для непрерывных функций распределения вероятностей СП задается последовательностью функций плотности вероятности (ФПВ) $W_n(\vec{x_n},\vec{t_n}),\ n = 1,2,...,\infty$:

- одномерных
$$W_1(x_1,t_1) = \frac{dF(x_1,t_1)}{dx};$$
- двумерных
$$W_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = \frac{d^2F(x_1,t_1;x_2,t_2)}{dx_1\,dx_2};$$
- n-мерных
$$W_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n) = \frac{d^n}{dx_1\,dx_2\dots dx_n}F(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n).$$

На практике многомерные ФРВ и ФПВ реализовать очень не просто, но часто в этом нет необходимости, учитывая свойства моделируемых сигналов или шумов. Например, для статистически независимых СП $\vec{x_n} = (x_1,x_2,...,x_n)$, в различные моменты времени $\vec{t_n} = (t_1,t_2,...,t_n)$, что характерно для многих видов случайных сигналов и шумов, n-мерная ФПВ определяется произведением одномерных ФПВ:

$$W_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n) = \prod_{i=1}^{n} W_i(x_i,t_i).$$

Многомерные связанные условные СП проще выражать через условные ФПВ. Это относится, прежде всего, к марковскому СП и его свойству, что при известном значении $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ вероятность значения $X(t_n)$ для $t_n > t_{n-1}$ не зависит от значений СП в более ранние моменты времени. Тогда условная ФПВ марковского СП равна

$$W_{X_n|Y}(x_n,t_n \mid Y = \{\vec{x}_{n-1},\vec{t}_{n-1}\}) = W_{X_n|X_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_{n-1},t_{n-1}).$$

Для марковского СП вероятность нахождения параметра $X(t_n)$ в интервале от x_n до $x_n + \triangle x_n$ зависит только от его состояния в предшествующий момент t_{n-1}; это определяет СП без последействия. Такая n-мерная ФПВ определяется как:

$$W_n(\vec{x_n},\vec{t_n}) = W_1(x_1,t_1)\cdot\prod_{i=1}^{n-1} W_{X_{i+1}|X_i}(x_{i+1},t_{i+1} \mid x_i,t_i) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} W_2(x_i,x_{i+1},t_i,t_{i+1})}{\prod_{i=1}^{n-1} W_1(x_{i+1},t_{i+1})}.$$

Из этого следует, что марковский СП полностью определяется одномерными и двумерными ФПВ. Теория таких процессов хорошо проработана и используется для расчетов в современной теории связи.

Свойства функции распределения вероятности

- функция распределения вероятности определена на всей числовой прямой возможных значений СВ;
- значение функции от $-\infty$ равны 0 , $F(-\infty) = 0$;
- значение функции от ∞ равны 1 $F(\infty) = 1$;
- при $x_2 > x_1$ всегда $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, т.о. ФРВ — неубывающая функция;
- ФРВ не имеет размерности.

Свойства функции плотности вероятности

- значение функции $W(x)$ всегда больше или равны 0 , $W(x) \geqslant 0$, ФПВ неотрицательная функция;
- для функции $W(x)$ выполняется условие интегрального нормирования, т.е. площадь под кривой ФПВ равна 1 , $\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1$;
- ФРВ и ФПВ связаны соотношением $F(x) = \int\limits_{X} W(x)dx$, $W(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$.

Случайные процессы бывают стационарными и нестационарными. СП будет *стационарен* в узком смысле, когда все его вероятностные характеристики произвольного порядка не зависят от времени начала отсчета СВ. Это такие процессы (стационарные), вероятностные характеристики которых не изменяются с течением времени.

Стационарный СП называется *эргодическим*, когда его вероятностные характеристики, найденные усреднением по множеству реализаций СВ, равны его вероятностным характеристикам, полученным усреднением по времени от одной, но бесконечно длинной реализации СВ.

1.2.3. Оценка закона распределения вероятностей

Результатом проведенного эксперимента или измерения наблюдаемого параметра x является ограниченный ряд полученных оценок $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такой ряд называется *выборкой* объема или размера N. Для проведения оценки *эмпирического (или выборочного) распределения вероятности* полученных данных существуют два способа:

- оценка плотности распределения вероятности;
- оценка функции распределения вероятности.

Выполняя оценку плотности распределения вероятности (дифференциальной функции распределения вероятности), весь интервал полученных значений оценки параметра x разбивают на K интервалов. В общем случае длины интервалов не обязательно должны быть равными, но обычно при расчетах выполняют равномерное разбиение интервалов. Далее подсчитывают количество попаданий полученных выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в каждый из

K интервалов, равное m_k, где $k = \overline{1, K}$, и определяют частоту попадания в интервал:

$$\nu_k = \frac{m_k}{N},\ k = \overline{1, K}.$$

Для k-го интервала с длиной $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ за оценку значения плотности распределения вероятности $W(x)$ на этом интервале принимают величину

$$W(x) = \frac{\nu_k}{\Delta x_k} = \frac{m_k}{N * \Delta x_k},\ x_{k-1} \leqslant x < x_k,$$

где x_{k-1} и x_k — границы k-го интервала. Полученная оценка $W(x)$ имеет вид ступенчатой функции или *гистограммы*, а сам метод называется *методом гистограмм*.

Одним из важных вопросов при использовании метода гистограмм является выбор количества интервалов K. На этот счет существует достаточно большое количество рекомендаций, часть из которых носит эвристический характер, а часть имеет теоретическое обоснование. Например считается, что для получения приемлемых результатов требуется попадание в каждый интервал не менее 8 значений случайной величины x. Но реализовать на практике такое требование часто не удается. Совершенно очевидным является предположение — выбор количества интервалов K должен зависеть от размера выборки N, поскольку при фиксированном N малое значение K приведет к излишнему сглаживанию гистограммы, а при большом K будут большие случайные ошибки оценивания.

В 1926 году Стёрджес предложил свое эмпирическое правило, что число интервалов гистограммы K и объем выборки N должны быть связаны соотношением:

$$K = 1 + \log_2 N.$$

В ходе применения **правило Стёрджеса** показало излишнее сглаживание гистограммы, но это правило входит в состав рекомендованных к применению [7]. Специалистами в математической статистике был произведен поиск с целью определения оптимального при данном размере выборки количества интервалов. В 1950 году советский математик Н. В. Смирнов показал, что отклонение гистограммы от графика неизвестной плотности вероятности обратно пропорционально $\sqrt[3]{N}$. В настоящее время известны и рекомендованы следующие правила выбора числа интервалов (приведены некоторые из них):

- **правило Штюргеса** (рек. [7])

$$K = 1 + 3{,}32 * \log_{10} N;$$

- **правило Райса**

$$K = 2\sqrt[3]{N};$$

- **формула Доана**

$$K = 1 + \log_2 N + \log_2 \left(1 + \frac{|\beta|}{\sigma_\beta}\right),$$

где β — коэффициент ассиметрии распределения случайной величины, $\sigma_\beta = \sqrt{\dfrac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)}}$;

- **правило Брукса и Каррузера** (рек. [7])

$$K = 5 * \log_{10} N.$$

В качестве общей рекомендации (в том числе и согласно [7]) при построении гистограмм предлагается не превышать число интервалов $K \leqslant \dfrac{N}{5}$.

Чтобы провести оценку функции распределения вероятности (интегральной функции распределения), расположим результаты эксперимента $x_1, x_2, \ldots, x_N \quad i = 1, 2, \ldots, N$ в порядке возрастания. В результате ранжирования данных получим *вариационный ряд*

$$x_1', x_2', x_3', \ldots, x_m', \ldots, x_N' \quad m = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Эмпирической частотой называется количество членов вариационного ряда (1.2) меньших текущего x

$$\nu(x) = m, \quad x_m' < x, \quad m = 1, \ldots, N.$$

Эмпирической функцией распределения случайной величины x называется функция

$$F(x) = \frac{\nu(x)}{N} = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_1'; \\ \dfrac{m}{N}, & \text{при } x_m' \leqslant x < x_{m+1}', \quad 1 \leqslant m \leqslant N-1; \\ 1, & \text{при } x \geqslant x_N'. \end{cases} \tag{1.3}$$

Функция $F(x)$ имеет ступенчатый вид и изменяется от 0 до 1. Скачки функции, равные $\dfrac{1}{N}$, приходятся на каждое ранжированное выборочное значение. В математической статистике доказана теорема Гливенко, подтверждающая, что представленная эмпирическая функция распределения (1.3) $F(x)$ — состоятельная и несмещенная оценка интегральной функции распределения случайной величины x.

Возможен еще один вариант построения более сглаженной эмпирической функции распределения по точкам полученной гистограммы.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<min(x);\\ \dfrac{1}{N}, & \text{при } x=min(x);\\ \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{K} m_k}{N}, & \text{при } \dfrac{\triangle x_1}{2}\leqslant x_k\leqslant \dfrac{\triangle x_K}{2},\quad 1\leqslant k\leqslant K;\\ 1, & \text{при } x=max(x). \end{cases}$$

1.2.4. Оценка моментов распределения

При описании функций распределения вероятностей используются специальные меры или параметры, называемые *моментами*. Отдельные моменты и их комбинации характеризуют такие важные в практическом отношении характеристики распределения вероятностей, как центр группирования данных, степень их рассеяния относительно центра, поведение случайных величин в районе центра группирования, симметричность распределения вероятностей.

Для случайных величин в теории вероятностей вводятся начальные моменты

$$M_p=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^p W(x)\,dx,\quad p=1,2,\,\ldots$$

и центральные моменты

$$m_p=\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-M_1)^p W(x)\,dx,\quad p=2,3,\,\ldots,$$

где $W(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ — плотность распределения вероятности случайной величины x.

В ходе анализа результатов эксперимента или моделирования оцениваются и чаще всего используются следующие величины:

1. *Математическое ожидание* — центр группирования результатов эксперимента, вычисляется как среднее значение и равно первому начальному моменту.

2. *Дисперсия* — рассеяние случайных величин вокруг центра группирования. Вычисляется как матожидание квадрата отклонения случайной величины от среднего значения и соответствует второму центральному моменту.

3. *Медиана* — 50% квантиль распределения на интервале или выборке (делит площадь под функцией плотности распределения $W(x)$ на две равные части). На полной выборке может быть равен матожиданию.

4. *Квантили* — абсциссы вертикальных линий, разделяющие площадь под кривой плотности вероятности распределения (по правилу нормирования равна единице и отражает вероятность всех возможных значений случайной величины). Так между *нижним квантилем (1-квартилем)* (25% квантиль распределения на интервале или выборке) и *верхним квантилем (3-квартилем)* (75% квантиль распределения на интервале или выборке) рассматриваемого распределения заключено 50% всех возможных значений случайной величины. Интервал значений случайной величины между 5% и 95% квантилями называется интерквантильным промежутком $d_д$ с 90% вероятностью. На основании такого подхода вводится понятие квантильных оценок случайной величины, т.е. значений случайной величины с заданной *доверительной вероятностью* $p_д$, как границ интервала неопределенности $(\pm\triangle_д = \pm\frac{d_д}{2})$, на протяжении которого встречается $p_д$ процентов всех значений случайной величины, а $(1 - p_д)$ процентов значений остаются за границами этого интервала.

5. *Стандартное отклонение* — обычно квадратный корень из дисперсии (не всегда).

6. *Коэффициент вариации* — отношение стандартного отклонения к матожиданию.

7. *Размах* — вычисляемая разница между max и min. При анализе результатов значения max и min часто рассматриваются как отдельные моменты распределения.

8. *Коэффициент асимметрии* — характеризует симметричность распределения. Если равен 0 — распределение симметрично, если меньше 0 — распределение имеет левую асимметрию, если больше 0 — распределение имеет правую асимметрию.

9. *Эксцесс* — характеризует особенности поведения случайной величины в области максимума плотности вероятности. За равенство 3 принят эксцесс нормального (гауссовского) распределения, если меньше 3 — распределение имеет более плоскую вершину, чем нормальное, если больше 3 — распределение имеет более острую вершину, чем нормальное.

1.2.5. Равномерное распределение

Находит широкое применение, чаще в непараметрической статистике. Равномерному распределению подчиняются случайные величины, имеющие одинаковую вероятность появления (например, погрешность измерений с округлением).

Параметры распределения: $a = AMin$ - минимальное, $b = AMax$ - максимальное значения СВ.

Плотность распределения вероятности:

$$W(x:a,b) = \begin{cases} (b-a)^{-1}, & \text{при } a < x < b; \\ 0, & \text{при } x < a; x > b. \end{cases}$$

Функция распределения вероятности:

$$F(x:a,b) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x < b; \\ 1, & \text{при } x \geqslant b. \end{cases}$$

Матожидание: $M(x) = \dfrac{b+a}{2}$, дисперсия: $D(x) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ СКО: $\sigma = \sqrt{D(x)}$, медиана $Me = M(x)$.

Сумма n независимых равномерно распределенных случайных величин описывается нормальным распределением уже при $n \geqslant 5$. Функция распределения любой случайной величины $y - F(y)$ сама распределена равномерно на отрезке $[0,1]$.

1.2.6. Нормальное распределение

Наиболее широко применяемое распределение. В самом названии распределения отражена идея его универсальности. Также может называться распределением Гаусса или Гаусса-Лапласа — распределение вероятностей в одномерном случае задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса. Теоретической основой нормального закона распределения вероятностей является центральная предельная теорема Ляпунова, утверждающая, что распределение суммы независимых случайных величин с любым исходным распределением будет нормальным, если число слагаемых достаточно велико, а вклад каждого в сумму мал. Нормальное распределение является краеугольным камнем математической статистики в силу ряда причин:

- схема появления СВ соответствует многим реальным физическим процессам, порождающим результаты обрабатываемых наблюдений;
- при возрастании объема выборки СВ предельное распределение для большинства распределений является нормальным и может достоверно использоваться для аппроксимации последних;
- нормальное распределение обладает рядом удачных математических и статистических свойств (легко нормируется и аппроксимируется, обладает свойством аддитивности).

Параметры распределения: $\mu = M(x)$ - центральное значение СВ, $\sigma = \sqrt{D(x)}$ - среднеквадратичное отклонение значения СВ.

Плотность распределения вероятности:

$$W(x:\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}.$$

Функция распределения вероятности:

$$F(x:\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)} dx.$$

Матожидание: $M(x) = \mu$, дисперсия: $D(x) = \sigma^2$, СКО: $\sigma = \sqrt{D(x)}$, медиана $Me = M(x)$. Распределение симметрично относительно точки $x = \mu$ и имеет два параметра μ и σ, совпадающих со средним значением и стандартным отклонением.

Гауссовский (нормальный) случайный процесс является математической моделью канального шума и ряда других шумовых процессов, широко используемых в теории и технике передачи данных.

1.2.7. Экспоненциальное распределение

Одно из основных применяемых распределений в теории массового обслуживания и теории надежности. Второе наименование — показательное распределение. Используется для описания в расчетных моделях потоков заявок, сигналов, шумов, площадей рассеивания для радиосигналов, внезапных отказов и т.д.

Параметры распределения: λ - средняя интенсивность поступления требований или заявок СВ, обычно $const$, характеризует временной интервал между событиями $T = \frac{1}{\lambda}$.

Плотность распределения вероятности:

$$W(x:\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}, \ \ x \geqslant 0.$$

Функция распределения вероятности:

$$F(x:\lambda) = 1 - e^{\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}, \ \ x \geqslant 0.$$

Матожидание: $M(x) = \lambda$, дисперсия: $D(x) = \lambda^2$, медиана $Me = \lambda\, ln2 = 0.6931\lambda$.

Если функцию плотности вероятностей экспоненциального распределения отразить зеркально в область отрицательных значений, то есть, заменить X на $\mid x \mid$, то получится распределение Лапласа, также называемое двойным экспоненциальным или двойным показательным.

1.2.8. Энтропия источников сообщений

Энтропия - это мера хаотичности чего-либо, выражающая неопределённость появления какого-либо события, символа алфавита, изменения параметра и ...

Информационная энтропия для независимых случайных событий (сообщений) x с n-возможными состояниями (сообщениями) (от 1 до n) рассчитывается как средняя энтропия сообщения или среднее количество информации, приходящееся на одно сообщение:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p(i)\, log_2 p(i),$$

где $p(i)$ - вероятность появления i-го сообщения, или как MAX частная энтропия i-го состояния события x , при равномерном распределении событий (сообщений) - это же значение определяет количество информации в дискретном сообщении (в битах).

Если рассмотреть дискретный источник конечного типа, то для каждого возможного состояния i будет набор вероятностей $p_i(j)$ появления различных возможных символов j. Таким образом, для каждого состояния существует энтропия H_i. Энтропия источника будет определяться как сумма этих частных энтропий H_i, взвешенное в соответствии с вероятностью возникновения рассматриваемых состояний.

Энтропия совместного события, если события независимы, а именно $p(i,j) = p(i) * p(j)$, мера неопределенности совместного мероприятия меньше или равна сумме отдельных энтропий каждого события $H(x,y) \leqslant H(x) + H(y)$.

Количество информации при передаче непрерывных сообщений расчитывается при обязательном условии ограниченной полосы частот. Непрерывные по времени сигналы сводятся к дискретным по времени. Специфика оценки состоит в учете непрерывных распределений мгновенных значений сигнала в установленные моменты времени.

Энтропия непрерывно распределенной скалярной случайной величины. Распределение непрерывной случайной величины x с плотностью вероятности $p(x)$ можно аппроксимировать задаваемым дискретизированным распределением. Отсчеты сигнала x_l, берут с интервалом дискретизации $\triangle x$. Их характеризуют вероятностями $p_l = p(x_l) * \triangle x$, сумма которых равна единице, а также логарифмами вероятностей $log_2 p_l = log_2 p(x_l) + log_2 \triangle x$.

Энтропия для случая дискретизированного по уровням распределения

$$H_{\text{диск}}\,(x) = -\sum_{l} p(x_l)\, log_2 p(x_l) \triangle x + log_2 \frac{1}{\triangle x}$$

содержит наряду с выражением, характеризующим степень неопределенности заданного или полученного распределения $p(x)$, независящее от него дополнительное слагаемое, которое соответствует логарифму числа отсчетов $M = \frac{1}{\triangle x}$, приходящихся на единицу общего интервала с неограниченным верхним пределом при $\triangle x \to 0$.

Расчетная формула информационной энтропии дискретного источника сообщений (сигнала)

$$H(x) = log_2 l,$$

где l — длина распределения ненулевых значений вероятности $p(x) = \frac{1}{l}$ для равномерного или $p(x) = f(x,l)$ в случае других распределений вероятности. При заданном параметрическом уровне квантования $\triangle x$ количество информации в дискретном отсчете будет равно количеству уровней квантования $l = \frac{x_{max} - x_{min}}{\triangle x}$.

1.2.9. Расчет необходимой пропускной способности канала передачи данных для источников сообщений

Представленный расчет производится для двоичного байтового канала передачи данных.

Полученную энтропию для каждого источника приводим к байтовой длине $Bt = \dfrac{H(x)}{8}$ с округлением значения до целого в большую сторону. Затем полученную величину переводим в реальную битовую скорость с учетом частоты дискретизации $B = Bt * 8 * dF$ [бит/сек].

Если количество источников сообщений более одного, находим необходимую пропускную способность канала передачи данных как общую сумму — $B \geqslant \sum_k C_i * B_i$ [бит/сек], где k - количество источников, C_k - весовой коэффициент нагрузки канала от каждого источника (1, если не указано иначе).

1.3. Варианты для выполнения задания

1.3.1. Задание практической работы

Три источника сообщений, каждый из которых выдает сообщение $x(t)$, представляющее собой непрерывный стационарный случайный процесс (СП), мгновенные значения которого распределены как один параметр A (амплитуда) случайной величины (СВ) в интервале $[A_{Min}; A_{Max}]$ по заданному закону для 3-х случаев распределения - равномерное, нормальное, экспоненциальное, дискретизация параметров каждого источника производится выборками реализациями по N-отсчетов с заданной частотой дискретизации dF и заданным уровнем квантования dA.

Необходимо смоделировать источники, исследовать их характеристики и определить следующие технические значения их параметров в соответствии со своим вариантом:

1. Получить временной график отсчетов параметра каждого источника сообщений.
2. Записать аналитическое выражение и построить график одномерной плотности вероятности мгновенных значений сообщения $x(t)$ для одной реализации каждого из источников.
3. Записать аналитическое выражение и построить график одномерного распределения вероятности мгновенных значений параметра сообщения $x(t)$ для одной реализации каждого из источников.
4. Рассчитать математическое ожидание, дисперсию и СКО для одной реализации каждого из источников.
5. На каждом графике для каждого источника обозначить максимальное и минимальное значения параметра источника, его математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение.
6. Рассчитать энтропию и необходимую пропускную способность канала передачи данных для каждого источника. Определить минимально необходимую пропускную способность канала передачи данных для одновременного пропуска сообщений о параметрах всех трех источников, исходя из нулевых информационных потерь.

1.3.2. Варианты заданий практический работы

Вариант задания выбирается по номеру в журнале группы.

Таблица 1.1

Исходные данные источников сообщений.

№ варианта	N	A_{Min}	A_{Max}	dA	dF
1	3000	1.8	60	0.2	1000
2	2400	-8	26	0.15	4000
3	2500	-24	16	0.25	5000
4	3500	1	126	0.5	400
5	4000	2.3	76	0.45	2000
6	1500	-118	126	0.35	3000
7	4500	37	129	0.23	4000
8	3500	1.6	16	0.05	1000
9	1000	-2.6	26	0.15	2000
10	2000	3.1	46	0.25	5000
11	4500	-0.8	9.6	0.02	4000
12	2500	-0.8	26	0.15	1000
13	2800	4.1	216	0.35	4000

Окончание табл. 1.1

Исходные данные источников сообщений.

№ варианта	N	A_{Min}	A_{Max}	dA	dF
14	3600	-234	250	0.5	2000
15	6000	0.5	26	0.15	600
16	3000	-3.8	33	0.26	3000
17	4000	-8.5	26	0.18	5000
18	5000	22	56	0.34	2000
19	2800	3.7	26	0.12	3000
20	4400	-28	5	0.15	4000
21	5600	-18	-2.3	0.05	1000
22	2200	-0.8	2.6	0.01	1000
23	2600	-81	-26	0.25	3000
24	2400	4.8	46	0.42	2000
25	2500	-30	30	0.15	4000
26	2600	-8	96	0.25	5000
27	3400	2	41	0.12	4000
28	3500	-2.8	16	0.1	2000
29	4200	0.75	12	0.1	1000
30	4400	-0.5	14	0.05	4000

1.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).

2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.

3. Подготовить для расчетов систему вычислений Octave. Загрузить в рабочие каталоги системы Octave программы моделирования и исследования источников сообщений $progPR-1-A-TSiUPD.m$ — для источника с равномерным распределением, $progPR-1-B-TSiUPD.m$ — для источника с нормальным распределением, $progPR-1-C-TSiUPD.m$ — для источника с экспоненциальным распределением.

4. По очереди запускать программы на исполнение, вводить исходные данные своего варианта, исследовать источники получением нескольких реализаций, сохранить файлы результатов для одной из реализаций по каждому источнику сообщений. Можно сохранять все реализации, но помним, что файлы переписываются каждый раз заново по результатам текущей реализации СВ. Результаты сохраняются в текстовом, а графики в pdf-формате.

5. Произвести все необходимые расчеты в соответствии с заданием и нанести значения на графики. Записать и представить в аналитическом виде необходимые выражения и в числовом виде результаты расчетов.

6. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

7. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны наименование работы и учебной дисциплины, цель, номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося. Рекомендуется использовать утвержденные образцы титульных листов.

8. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется индивидуально. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave. Программы расчетов в отчет включать **НЕ НУЖНО!** Допускается модификация текстов программ. Все результаты **ОБЯЗАТЕЛЬНО** должны быть представлены преподавателю в документальном или письменном виде с обязательными атрибутами идентификации — номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

1.5. Контрольные вопросы

1. Что такое энтропия, чем она отличается от информационной энтропии?
2. Что характеризует функция плотности распределения вероятности, перечислите и объясните ее свойства?
3. Что такое функция распределения вероятностей, перечислите и объясните ее свойства?
4. Поясните процедуру дискретизации параметра в случае источника непрерывных сообщений.
5. Как функционально связаны энтропия и пропускная способность канала передачи данных?

Список использованных источников

1. Емельянов, Г. А., Шварцман В. О. Передача дискретной информации: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1982. — 240 с.
2. Олифер, В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы : учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер. — СПб. : Питер, 2012. — 943 с.

Практическая работа 2
Способы представления и преобразования детерминированных сигналов

2.1. Цели работы

Освоить на практике временные и частотные способы представления детерминированных сигналов различной формы. Научиться выполнять преобразование Гилберта для получения аналитической формы сигнала и преобразования Фурье для получения спектров различного назначения, научится получать разностный градиентный сигнал и выполнять преобразование Лапласа для дискретных форм исходного и квантованного сигналов в соответствии с указанными в задании сигнальными параметрами.

2.2. Теоретические сведения

2.2.1. Детерминированные сигналы

Детерминированный — вполне определенный или точно известный. Любой электрический сигнал является изменяющейся во времени электрической величиной (напряжением или током). Измерения значений этих сигнальных параметров наглядно можно представить с помощью временных диаграмм, когда по оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат мгновенное значение параметра сигнала. Математическое выражение, по которому для любого момента времени t можно вычислить значение электрического сигнала $u(t)$ называется математической детерминированной моделью этого сигнала.

Например, для гармонического сигнала функция, полностью описывающая сигнал, содержит численные значения таких параметров как амплитуда тока I или напряжения U, частота f и начальная фаза ϕ

$$u(t) = U sin(\omega t + \phi),$$

где ω - угловая или циклическая частота сигнала [радиан/секунду] — $\omega = 2\pi f$. Период сигнала $T = \frac{1}{f}$. В любой момент времени детерминированный сигнал является достоверным событием.

Временное представление сигналов

Среди различных аналитических моделей сигналов часто используют их представление в виде суммы элементарных сигналов. При данном представлении модель сигнала $x(t)$ задается суммой следующих во времени с известного момента t_0 детерминированных сигналов, заданных своими параметрами и выраженными посредством известных, математически определенных, сохраняющих свои свойства функций.

Запишем гармоническое колебание несколько иначе в двух представлениях

$$u_s(t) = U sin(\omega t + \phi),$$
$$u_c(t) = U cos(\omega t + \phi) = U sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right),$$

когда колебания $u_s(t)$ и $u_c(t)$ сдвинуты друг относительно друга по фазе (углу) на величину $\frac{\pi}{2}$ (90^o).

При разных исследованиях в модельном представлении вместо двух действительных функций рассматривают одну комплексную функцию

$$\dot{u}(t) = u_c(t) + j u_s(t) = U[cos(\omega t + \phi) + j sin(\omega t + \phi)] = U e^{\omega t + \phi},$$

которую называют *комплексным гармоническим колебанием* и в символьном виде записывается как

$$\dot{u}(t) = \dot{U} e^{j\omega t}, \qquad \dot{U} = U e^{j\phi},$$

где $\dot{U}$ - *комплексная амплитуда*, определяемая амплитудой и фазой колебания.

$$u_c(t) = \Re(\dot{u}(t)), \qquad u_s(t) = \Im(\dot{u}(t)), \qquad U = |\dot{U}|, \qquad \phi = Arg(\dot{U}).$$

Вводится понятие *отрицательной частоты*, при котором в соответствии с формулой Эйлера реальный сигнал представляется как

$$u_c(t) = \Re[\dot{U} e^{j\omega t}] = U cos(\omega t)|_{\phi=0} = U \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

и определяется суммой двух комплексно-сопряженных векторов, вращающихся в разные стороны с угловыми скоростями $+\omega$ и $-\omega$. Проекции этих векторов на действительную ось складываются и образуют действительное колебание. Поэтому, при дискретном преобразовании Фурье для действительного колебания обязательно наличие как прямого спектра для положительных частот $\omega > 0$, так и инверсного спектра для отрицательных частот $\omega < 0$.

2.2.2. Аналитический сигнал

Символический метод изображения сигнала в виде действительной и мнимой частей комплексной функции позволил ввести понятие *аналитического сигнала*, согласованного с вещественным $x(t)$. Вещественный сигнал $x(t)$ является действительной частью аналитического сигнала $\dot{x}(t)$ и определяется выражением:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(t) + \bar{\dot{x}}(t)}{2} = \Re(\dot{x}(t)).$$

Мнимая часть $\Im(\dot{x}(t))$ называется сопряженным сигналом.

Аналитический сигнал представляется в следующем виде

$$\dot{u}(t) = u(t) + j\Im(\dot{u}(t)) = U(t)e^{j\psi(t)} = U(t)cos\psi(t) + U(t)j\,sin\psi(t),$$

откуда амплитуда и фаза определяются общеизвестным способом как модуль и аргумент комплексного числа.

Преобразование Гильберта

В соответствии с теорией линейных систем *преобразованием Гильберта* называют следующие взаимно однозначные соотношения

$$\bar{\dot{x}}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau,$$

$$x(t) = H^{-1}[\bar{\dot{x}}(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\dot{x}}(\tau)}{t-\tau}d\tau,$$

определяющие прямое и обратное преобразования Гильберта между сигналами.

Значит сигнал, сопряженный по Гильберту и разложенный в ряд Фурье можно записать в виде

$$\bar{\dot{x}}_{T_x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(n\omega_0 t) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n cos(n\omega_0 t), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_x}.$$

Для периодического сигнала $x_{T_x}(t)$ сопряженный ему по Гильберту сигнал $\bar{\dot{x}}_{T_x}(t)$ периодичен и удовлетворяет условию ортогональности вида

$$\int_0^T x_{T_x}(t)\,\bar{\dot{x}}_{T_x}(t)\,dt = 0,$$

а это значит, что преобразователь Гильберта представляет собой обычный фазовращатель на $\frac{\pi}{2}$ (90^o) для всех составляющих гармонического ряда в спектре сигнала с коэффициентом передачи $-j$ для частот $\omega \geqslant 0$ и $+j$ для частот $\omega < 0$. Фактически это линейный фильтр с равномерной АЧХ, равной 1, то есть $K_u = 1$ по всему диапазону $[-\omega, +\omega]$ и ступенчатой ФЧХ, равной $K_\psi = -\frac{\pi}{2}$ для частот $\omega \geqslant 0$ и $K_\psi = \frac{\pi}{2}$ для частот $\omega < 0$.

Такое представление сигнала позволяет ввести в математическую модель понятие мгновенной частоты сигнала, как производной от фазы сигнала

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

и на комплексной плоскости аналитический сигнал $\dot{x}(t)$ изображать вектором с изменяющейся амплитудой $U(t)$, вращающейся относительно начала координат с переменной угловой скоростью $\omega(t)$.

Проверяем, для случая $x(t) = Ucos(\omega_0 t)$, $\dot{x}(t) = Usin(\omega_0 t)$ мгновенная частота $\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(arctg\frac{Usin(\omega_0 t)}{Ucos(\omega_0 t)}\right) = \frac{d}{dt}\omega_0 t = \omega_0$ означает постоянную угловую скорость равную частоте гармонического колебания.

2.2.3. Спектр аналитического сигнала

Запишем исходный сигнал $x(t)$ как обратное преобразование Фурье от функции спектральной плотности его комплексных амплитуд $X(j\omega)$ (результат от прямого преобразования Фурье исходного сигнала)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

с разделением выражения для положительных и отрицательных частот. Полученное выражение означает, что спектр аналитического сигнала определен только в области положительных частот $\omega \geqslant 0$ в котором равен $2X(j\omega)$, для отрицательных частот $\omega < 0$ все значения спектральных составляющих равны нулю.

2.2.4. Дискретное преобразование Фурье

Аналоговое преобразование Фурье выполняется и справедливо для идеального, бесконечно наблюдаемого сигнала. Реальные сигналы всегда задаются на конечном интервале T_x. Значит и анализировать сигнал следует на ограниченном интервале наблюдения: $x(t), 0 < t < T_x$. Известно, что ограниченный по времени сигнал всегда можно продолжить периодически $x(t) = x_{T_x}(t) = x(t+T_x)$.

Спектральное представление сигнала

Выполняя условия для сигнала, заданные выше, и добавляя к ним обязательные условия Дирихле (функция для разложения в ряд или интеграл Фурье должна иметь конечное число экстремумов на интервале наблюдения $[t, t+T_x]$, быть абсолютно интегрируемой и все точки разрыва функции по отношению к точкам непрерывности определяются как $\frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{2}$ во всех точках разрыва x_0) любой сигнал может быть представлен тригонометрическим рядом Фурье

$$x_{T_x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\omega_0 t), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_x}.$$

Используя формулы Эйлера

$$cos(n\omega_x t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \qquad sin(n\omega_x t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j},$$

ряд преобразуем к виду

$$x_{T_x}(t) = \frac{1}{2}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}\right],$$

затем вводим понятие комплексной амплитуды $\dot{X}_n$

$$\dot{X}_n = \begin{cases} \frac{(a_n - jb_n)}{2}, & n > 0, \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0, \\ \frac{(a_n + jb_n)}{2}, & n < 0, \end{cases}$$

и записываем сигнал в виде экспоненциального ряда Фурье

$$x_{T_x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{X}_n e^{jn\omega_0 t}, \qquad \dot{X}_n = X_n(jn\omega_0),$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_x}$ - основная частота следования сигнала; $\omega_n = n * \omega_0$ - частота, кратная основной частоте.

Переходим к дискретному представлению реального сигнала и запишем выражения для прямого и обратного дискретного преобразования Фурье:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad k = 0 \ldots N-1;$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad n = 0 \ldots N-1;$$

где n - временные, а k - частотные индексы отсчетов на основе которых и производятся вычисления ДПФ и ОДПФ на базе нормированной частотной шкалы без привязки к частоте дискретизации.

Индексация отсчетов ДПФ

Длина реализации сигнала - период повторения сигнальной функции $T_x = T_0$.
Интервал дискретизации $\Delta = T_d = \frac{T_x}{N-1}$.
Частота дискретизации в $[Hz]$ - $f_d = \frac{1}{T_d}$, угловая в $[rad * s^{-1}]$ - $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 2\pi f_d$.
Частотный шаг спектра $\Delta\omega = \frac{2\pi f_d}{N} = \frac{2\pi}{N*T_d}\,[rad * s^{-1}]$, или $\Delta f = \frac{f_d}{N} = \frac{1}{N*T_d}\,[Hz]$.
k-ый спектральный отсчет $\omega_X(k) = k * \Delta\omega = \frac{2\pi k f_d}{N}\,[rad * s^{-1}]$ или $f_k = \frac{k f_d}{N}\,[Hz]$.

В практических целях для получения спектра используют не дискретное ДПФ, а быстрое преобразование Фурье (БПФ) на основе ускоренных алгоритмов с меньшим числом операций.

2.2.5. *Спектральная плотность мощности*

Для оценки сигналов вводят понятие *спектральной плотности мощности*, которая позволяет судить о частотных свойствах сигнала и характеризует интенсивность (иначе среднюю мощность) этого процесса, приходящуюся на единицу полосы частот. С физической точки зрения это частотная функция, определяющая частотный состав, как *спектр детерминированного или случайного процесса*, показывающий распределение мощности сигнала по частотам спектра (частотам рассматриваемого диапазона).

Традиционные методы спектрального оценивания реализованы, как правило, на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ) и характеризуются принятием различных компромиссных допущений для получения статистически надежных спектральных оценок. В основном эти допущения касаются выбора весовых функций (функций весового окна) и усреднения дискретных данных сигнального процесса во временной и частотной областях, используемых для того, чтобы сбалансировать требования к точности получаемых оценок и обеспечить приемлемое частотное разрешение.

Для изложения основ спектрального анализа рассмотрим вначале случай детерминированного непрерывного случайного процесса (аналогового сигнала), представленного как функция времени $x(t)$. Для большего обобщения полагаем эту функцию комплексной, и если $x(t)$ абсолютно интегрируема, то есть имеет конечную энергию, то для нее существует непрерывное преобразование Фурье (НПФ) $X(f)$ функции $x(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \tag{2.1}$$

Квадрат модуля такого преобразования называется спектром функции (сигнала) $x(t)$:

$$s(f) = |X(f)|^2. \tag{2.2}$$

Теорема Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \tag{2.3}$$

представляет собой формулировку закона сохранения энергии — энергия функции (сигнала) во временной области равна энергии функции (сигнала) после его преобразования в частотную область. Следовательно, $s(f)$ — энергетическая спектральная плотность, которая характеризует распределение энергии функции (сигнала) по частоте.

Непрерывную функцию $x(t)$ дискретизируем по времени с интервалом $\triangle t$ и получаем дискретную последовательность $x_n = x(n\triangle t), \quad -\infty < n < \infty$, которую можно представить, как произведение исходной временной функции $x(t)$ и бесконечного количества дельта-функций Дирака $\delta(t)$. Тогда согласно (2.1) получаем:

$$\acute{X}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - n\triangle t)\triangle t \right] e^{-j2\pi ft} dt = \triangle t \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi fn\triangle t}, \qquad (2.4)$$

что соответствует аппроксимации преобразования ((2.1)) с помощью прямоугольников, и множитель $\triangle t$ обеспечивает сохранение области интегрирования при переходе от ((2.1)) к ((2.4)) при $\triangle t \to 0$. Формула ((2.4)) идентична ((2.1)) для преобразования $X(f)$ на интервале $-\dfrac{1}{2\triangle t} \leqslant f \leqslant \dfrac{1}{2\triangle t}$ с условием, что функция $x(t)$ имеет ограниченную полосу, и все ее частотные составляющие расположены в этом интервале. Тогда ее энергетическая спектральная плотность:

$$\acute{s}(f) = \left|\acute{X}(f)\right|^2 \qquad (2.5)$$

идентична ((2.2)) только для дискретных данных, полученных для сигнала (временного процесса) с ограниченной полосой частот.

Далее, если сигнальная последовательность x_n рассчитывается с помощью конечного временного окна длительностью от $n = 0$ до $n = N - 1$ и ее преобразование Фурье формируется из N отсчетов на частотах $f = m\triangle f$, где $m = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$ и $\triangle f = \dfrac{1}{N\triangle t}$, получаем *дискретное преобразование Фурье (ДПФ)*:

$$X_m = \triangle t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi m\triangle fn\triangle t} = \triangle t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-j2\pi mn}{N}}, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (2.6)$$

Приведенное прямое ДПФ ((2.6)) и соответствующее ему обратное преобразование (ОДПФ):

$$x_n = \triangle f \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{\frac{+j2\pi mn}{N}}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \qquad (2.7)$$

будут циклическими преобразованиями с периодом N. Теорема Парсеваля запишется как $\sum\limits_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \triangle t = \sum\limits_{m=0}^{N-1} |X_m|^2 \triangle f$. Соответственно дискретная энергетическая спектральная плотность равна:

$$s_m = |X_m|^2, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant m \leqslant N-1. \qquad (2.8)$$

Определенные выше дискретная энергетическая спектральная плотность s_m и непрерывная энергетическая спектральная плотность $\acute{s}(f)$ называются спектральными оценками на основе *периодограммы*.

Примечание. При этом значения s_m и $\acute{s}(f)$, вычисленные на частоте $f = \dfrac{m}{N\triangle f}$, $m = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$, не совпадают, так как $\acute{s}(f)$ — это дискретизированный вариант спектра, определяемого по свертке спектра $X(f)$ с преобразованием прямоугольного окна, в котором находятся отсчеты данных. И соответственно дискретный спектр s_m, полученный по конечной последовательности данных, будет искаженной версией непрерывного спектра $\acute{s}(f)$, соответствующего бесконечной последовательности данных.

В случае, если исходный процесс $x(t)$ представляет собой стационарный в широком смысле случайный процесс, то следует учитывать следующие моменты:

- энергия случайного процесса обычно бесконечна, поэтому искомой величиной в этом случае будет частотное распределение мощности (средняя по времени плотность энергии);
- интегралы по типу приведенного в формуле ((2.1)) для случайных процессов обычно не существуют.

Тогда основой для спектрального анализа становится не сам случайный процесс, а его автокорреляционная функция:

$$R_x(\tau) = M\left[x(t+\tau)\, x^*(t)\right] \tag{2.9}$$

которая при помощи теоремы Винера–Хинчина преобразованием Фурье связана со спектральной плотностью мощности:

$$S(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \tag{2.10}$$

Но в практических задачах статистическая автокорреляционная функция обычно не известна, и поэтому принимается следующее допущение о том, что случайный процесс эргодичен относительно первого и второго моментов. Это свойство позволяет заменить усреднение по ансамблю реализаций усреднением по времени. Тогда автокорреляция определяется как:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x^*(t) dt, \tag{2.11}$$

а спектр как:

$$S(f) = \lim_{T\to\infty} M\left\{ \frac{1}{2T} \left| \int\limits_{-T}^{T} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right\}. \tag{2.12}$$

Оператор матожидания подтверждает эргодичность (она не связана с преобразованием Фурье) и дает сходимость пределу в любом статистическом смысле.

Современный вариант периодограммы представляет собой прямой метод спектрального оценивания для дискретных данных $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$:

$$S_m = \frac{1}{N\triangle t}\left|\triangle t\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f n\triangle t}\right|^2 = \frac{1}{N\triangle t}\left|X_m\right|^2, \qquad (2.13)$$

определяется на частотном интервале $-\frac{1}{2\triangle t} \leqslant f \leqslant \frac{1}{2\triangle t}$ и производит оценку с использованием БПФ на дискретном множестве из N эквидистантных частот $f_m = m\triangle f$ Гц, $m = 0, 1, \ldots, N-1$, $\triangle f = \frac{1}{N\triangle t}$. X_m — ДПФ по ((2.6)).

В работе используется один из самых эффективных на практике методов: классический метод цифрового спектрального анализа на базе БПФ — метод Уэлча, когда выборка анализируемого процесса разбивается на 50% перекрывающиеся множества отсчетов процесса с последующим усреднением периодограмм этих множеств в весовом окне.

2.3. Варианты для выполнения задания

2.3.1. Задание практической работы

Для выполнения практической работы необходимо выполнить моделирование источников детерминированного сигнала $A(t)$ следующей формы с параметрами в соответствии со своим вариантом:

- синусоидального сигнала,
- прямоугольного сигнала,
- треугольного симметричного сигнала,
- линейно нарастающего сигнала.

Для каждой из форм смоделированного исходного сигнала выполнить необходимые преобразования и получить следующие представления сигнала:

1. Временное представление в аналитической форме (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
2. Спектральное представление аналитического сигнала в виде амплитудного спектра (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
3. Спектральное представление амплитудного и фазового спектра (представить в виде 2-х графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).
4. Определить и представить спектральную плотность мощности сигналов в виде периодограммы Уэлча.

5. На каждом графике (5 графиков) для каждой формы сигнала обозначить характерные значения параметров, определяющие вид представления и сигнальные особенности в соответствии с вариантом.

Для каждой из форм исходного сигнала выполнить дискретизацию и квантование в двуполярном цифровом представлении с минимальной постоянной составляющей в соответствии с заданием варианта и получить следующие представления для дискретной формы двуполярного квантованного сигнала:

1. Временное представление в аналитической форме (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
2. Спектральное представление амплитуды и фазы аналитического сигнала в виде амплитудного и фазового спектра (представить в виде 2-х графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).
3. Спектральное представление амплитудного и фазового спектра (представить в виде 2-х графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).
4. Определить и представить спектральную плотность мощности сигналов в виде периодограммы Уэлча (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
5. На каждом графике (6 графиков) для каждой формы сигнала обозначить характерные значения параметров, определяющие вид представления и сигнальные особенности в соответствии с вариантом.

Для каждой формы исходного и дискретного квантованного двуполярного сигналов найти градиент и дискретный оператор Лапласа. Представить сигнал на временном графике реализации синхронно с исходным или дискретным сигналом (2-ва временных графика). Всего: 13 графиков для каждой из 4-х форм — 13x4=52 графика с характерными параметрами в соответствии с вариантом задания.

Сравнить и проанализировать виды сигнального представления для каждой формы детерминированного сигнала. ОБЯЗАТЕЛЬНО указать и объяснить различия характерных параметров на графиках для исходного и дискретного двуполярного сигналов.

2.3.2. Варианты заданий практический работы

Вариант задания выбирается по номеру в журнале группы.

Таблица 2.1

Исходные данные источников сигнала.

№ варианта	N	A_{Min}	A_{Max}	dA	dF
1	3000	1.8	60	0.2	1000
2	2400	-8	26	0.15	4000

Окончание табл. 2.1

Исходные данные источников сигнала.

№ варианта	N	A_{Min}	A_{Max}	dA	dF
3	2500	-24	16	0.25	5000
4	3500	1	126	0.5	400
5	4000	2.3	76	0.45	2000
6	1500	-118	126	0.35	3000
7	4500	37	129	0.23	4000
8	3500	1.6	16	0.05	1000
9	1000	-2.6	26	0.15	2000
10	2000	3.1	46	0.25	5000
11	4500	-0.8	9.6	0.02	4000
12	2500	-0.8	26	0.15	1000
13	2800	4.1	216	0.35	4000
14	3600	-234	250	0.5	2000
15	6000	0.5	26	0.15	600
16	3000	-3.8	33	0.26	3000
17	4000	-8.5	26	0.18	5000
18	5000	22	56	0.34	2000
19	2800	3.7	26	0.12	3000
20	4400	-28	5	0.15	4000
21	5600	-18	-2.3	0.05	1000
22	2200	-0.8	2.6	0.01	1000
23	2600	-81	-26	0.25	3000
24	2400	4.8	46	0.42	2000
25	2500	-30	30	0.15	4000
26	2600	-8	96	0.25	5000
27	3400	2	41	0.12	4000
28	3500	-2.8	16	0.1	2000
29	4200	0.75	12	0.1	1000
30	4400	-0.5	14	0.05	4000

2.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).

2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.

3. Подготовить для расчетов систему вычислений Octave. Загрузить в рабочие каталоги системы Octave программу моделирования и представления детерминированных сигналов $progPR-2-TSiUPD.m$.

4. По-очередно запускать программу на исполнение, вводить исходные данные своего варианта, исследовать сигнальную реализацию, сохранять файлы результатов и графиков для своего варианта. При сохранении реализации помним, что файлы переписываются каждый раз заново по результатам теку-

щей реализации сигнала. Результаты сохраняются в текстовом, а графики в pdf-формате.

5. Произвести все необходимые расчеты в соответствии с заданием и нанести значения на графики. Записать и представить в аналитическом виде необходимые выражения и в числовом виде результаты расчетов.

6. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

7. Оформить отчет в печатном виде согласно задания варианта и рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны наименование работы и учебной дисциплины, цель, номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося. Рекомендуется использовать утвержденные образцы титульных листов.

8. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется индивидуально. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave. Программы расчетов в отчет включать **НЕ НУЖНО!** Допускается модификация текстов программ. Все результаты **ОБЯЗАТЕЛЬНО** должны быть представлены преподавателю в документальном или письменном виде с обязательными атрибутами идентификации — номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

2.5. Контрольные вопросы

1. Что такое аналитический сигнал, как его получить из реального сигнала?
2. Что характеризует спектральная плотность мощности сигнала, перечислите и объясните ее свойства?
3. Что такое спектр аналитического сигнала, перечислите и объясните его свойства?
4. Поясните процедуру дискретизации аналогового сигнала и поясните фильтрующее свойство дельта-функции.
5. Какую функциональную связь выражает теорема Парсеваля?

Список использованных источников

1. Емельянов, Г. А., Шварцман В. О. Передача дискретной информации: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1982. — 240 с.
2. Олифер, В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы : учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер. — СПб. : Питер, 2012. — 943 с.

Практическая работа 3
Способы представления и преобразования случайных шумоподобных сигналов

3.1. Цели работы

Освоить на практике временные и частотные способы представления случайных шумоподобных сигналов с различной функцией плотности распределения. Научиться выполнять преобразование Гилберта для получения аналитической формы таких сигналов и преобразования Фурье для получения сигнальных спектров различного назначения, научится получать разностный градиентный сигнал и выполнять преобразование Лапласа для дискретных форм исходного и квантованного сигналов в соответствии с указанными в задании сигнальными параметрами.

3.2. Теоретические сведения

3.2.1. Случайные шумоподобные сигналы

Системы связи с шумоподобными сигналами (ШПС) занимают особое место среди других систем связи благодаря своим полезным свойствами. Во-первых, они обладают хорошей помехозащищенностью при действии мощных помех. Во-вторых, обеспечивают кодовую адресацию большого числа пользователей и обеспечивают кодовое разделение их сигналов при работе в общей полосе частот. В-третьих, они обеспечивают совместимость приема информации с высокой достоверностью и измерения параметров движения объекта с высокой точностью и разрешающей способностью.

Эти свойства систем связи с ШПС были известны достаточно давно, но, поскольку существуют технологические ограничения и элементная база не позволяла реализовать устройства формирования и обработки в приемлемых габаритах, то долгое время системы связи с ШПС широкого развития не получали. К настоящему моменту положение резко изменилось. Мощность помех на входе приемника уже может значительно превышать мощность полезного сигнала. Для обеспечения высокой помехозащищенности используются ШПС со сверхбольшими базами (десятки-сотни тысяч), ансамбли систем сигналов могут состоять из десятков - сотен миллионов ШПС со сверхбольшими базами. Следует отметить, что основы теории ШПС со сверхбольшими базами сформировались только в последнее время. В свою очередь реализация устройств формирования и обработки таких сигналов становится возможной благодаря бурному развитию сверхбольших интегральных схем (СБИС), специализированных микропроцессоров (СМП), приборов с поверхностными акустическими волнами (ПАВ) и приборов с зарядовой связью (ПЗС). Все эти причины способствуют дальнейшему развитию систем связи с ШПС, в результате которого появляются новые системы связи следующих поколений.

Рассматривая реальные сигналы работающих систем связи с немонотонным квадратичным или колоколообразным изменением частоты, можно заметить, что они близки по параметрам функций неопределенности к шумоподобным фазоманипулированным сигналам, функция неопределенности которых имеют один, явно выраженный, центральный пик и начинают приближаются к «идеальному» сигналу для систем передачи. Функция неопределенности (ФН) на частотно-временной плоскости традиционно определяется двумя функциями — взаимо- или автокорреляционной функцией (ВКФ или АКФ) и частотной корреляционной функцией (ЧКФ). Именно такие однопиковые, явно выраженные АКФ, имеют длительные реализации шумовых сигналов, что и дало название этому классу сигналов.

При реализации систем передачи на основе ШПС с большими сигнальными базами помехоустойчивость используемых сигналов в значительной мере определяется подобием и различием структур сигнала и помехи. Практическая работа позволяет оценить результаты сигнальных преобразований и представлений для шумовых и шумоподобных сигналов для условий сосредоточенных помех или им подобных сигналов при равномерном, гауссовском и экспоненциальном представлении случайных сигнальных процессов.

Теоретические основы случайных процессов, сигнальных преобразований и представлений изложены в теоретической части двух предыдущих практических работ.

3.3. Варианты для выполнения задания

3.3.1. Задание практической работы

В практической работе необходимо выполнить моделирование случайного шумоподобного сигнала $A(t)$ в соответствии со следующими плотностями распределения амплитуд сигнала с параметрами в соответствии со своим вариантом:

- равномерная плотность распределения,
- нормальная плотность распределения,
- экспоненциальная плотность распределения.

Для каждого закона распределения смоделированного случайного сигнала выполнить необходимые преобразования и получить следующие представления сигнала:

1. Временное представление в аналитической форме (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).

2. Спектральное представление аналитического сигнала в виде амплитудного спектра (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).

3. Спектральное представление амплитудного и фазового спектра (представить в виде 2-х графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).

4. Определить и представить спектральную плотность мощности сигналов в виде периодограммы Уэлча.

5. На каждом графике (5 графиков) для каждого закона распределения сигнала обозначить характерные значения параметров, определяющие вид представления и сигнальные особенности в соответствии с вариантом.

Для каждого закона распределения случайного сигнала выполнить дискретизацию и квантование в двуполярном цифровом представлении с минимальной постоянной составляющей в соответствии с заданием варианта и получить следующие представления для дискретной формы двуполярного квантованного сигнала:

1. Временное представление в аналитической форме (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).

2. Спектральное представление амплитуды и фазы аналитического сигнала в виде амплитудного и фазового спектра (представить в виде 2-х графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).

3. Спектральное представление амплитудного и фазового спектра (представить в виде 2-х графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).

4. Определить и представить спектральную плотность мощности сигналов в виде периодограммы Уэлча (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).

5. На каждом графике (6 графиков) для каждого закона распределения сигнала обозначить характерные значения параметров, определяющие вид представления и сигнальные особенности в соответствии с вариантом.

Для каждого закона распределения случайного исходного и дискретного квантованного двуполярного сигналов найти градиент и дискретный оператор Лапласа. Представить сигнал на временном графике реализации синхронно с исходным или дискретным сигналом (2 временных графика). Всего: 13 графиков для каждого из 3-х законов распределения — 13x3=39 графиков с характерными параметрами в соответствии с вариантом задания.

Сравнить и проанализировать виды сигнального представления для каждого закона распределения случайного сигнала. ОБЯЗАТЕЛЬНО указать и объяснить различия характерных параметров на графиках для исходного и дискретного двуполярного сигналов.

3.3.2. Варианты заданий практический работы

Вариант задания выбирается по номеру в журнале группы.

Таблица 3.1

Исходные данные параметров сигнала.

№ варианта	N	A_{Min}	A_{Max}	dA	dF
1	3000	1.8	60	0.2	1000
2	2400	-8	26	0.15	4000
3	2500	-24	16	0.25	5000
4	3500	1	126	0.5	400
5	4000	2.3	76	0.45	2000
6	1500	-118	126	0.35	3000
7	4500	37	129	0.23	4000
8	3500	1.6	16	0.05	1000
9	1000	-2.6	26	0.15	2000
10	2000	3.1	46	0.25	5000
11	4500	-0.8	9.6	0.02	4000
12	2500	-0.8	26	0.15	1000
13	2800	4.1	216	0.35	4000
14	3600	-234	250	0.5	2000
15	6000	0.5	26	0.15	600
16	3000	-3.8	33	0.26	3000
17	4000	-8.5	26	0.18	5000
18	5000	22	56	0.34	2000
19	2800	3.7	26	0.12	3000
20	4400	-28	5	0.15	4000
21	5600	-18	-2.3	0.05	1000
22	2200	-0.8	2.6	0.01	1000
23	2600	-81	-26	0.25	3000
24	2400	4.8	46	0.42	2000
25	2500	-30	30	0.15	4000
26	2600	-8	96	0.25	5000
27	3400	2	41	0.12	4000
28	3500	-2.8	16	0.1	2000
29	4200	0.75	12	0.1	1000
30	4400	-0.5	14	0.05	4000

3.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).
2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.
3. Подготовить для расчетов систему вычислений Octave. Загрузить в рабочие каталоги системы Octave программу моделирования и исследования случайных сигналов $progPR-3-TSiUPD.m$.

4. По очередно запускать программу на исполнение, вводить исходные данные своего варианта, исследовать случайные шумоподобные сигналы с разными амплитудными законами плотности вероятности и получением нескольких сигнальных реализаций по каждому закону распределения, сохранить файлы результатов для одной из реализаций по каждому закону распределения. Можно сохранять все реализации, но помним, что файлы переписываются каждый раз заново по результатам текущей реализации случайного сигнала. Результаты сохраняются в текстовом, а графики в pdf-формате.

5. Произвести все необходимые расчеты в соответствии с заданием и нанести значения на графики. Записать и представить в аналитическом виде необходимые выражения и в числовом виде результаты расчетов.

6. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

7. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны наименование работы и учебной дисциплины, цель, номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося. Рекомендуется использовать утвержденные образцы титульных листов.

8. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется индивидуально. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave. Программы расчетов в отчет включать **НЕ НУЖНО!** Допускается модификация текстов программ. Все результаты **ОБЯЗАТЕЛЬНО** должны быть представлены преподавателю в документальном или письменном виде с обязательными атрибутами идентификации — номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

3.5. Контрольные вопросы

1. Объясните что означает стационарность случайного процесса?
2. Что характеризует широкополосный сигнал в системах передачи данных?
3. Какая взаимосвязь существует между квадратурными составляющими и амплитудой и фазой гармонического колебания?
4. Сформулируйте и поясните теорему Котельникова.
5. В чем заключается преобразование Гильберта?

Список использованных источников

1. Емельянов, Г. А., Шварцман В. О. Передача дискретной информации: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1982. — 240 с.

2. Олифер, В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы : учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер. — СПб. : Питер, 2012. — 943 с.

Практическая работа 4
Оценка эффектов маскирования для случайных шумоподобных и детерминированных сигналов

4.1. Цели работы

Ознакомиться и научиться оценивать взаимное влияние эффекта маскирования для сигналов различных форм при аддитивном воздействии в канале связи. Научиться выполнять оценку отношения сигнал/шум и сигнал/помеха при разных способах представления и преобразования сигналов в ходе цифровой обработки. Получить практический опыт выполнения оценок для сигналов с параметрами в соответствии с заданием варианта.

4.2. Теоретические сведения

4.2.1. Модели помех и эффект маскирования сигналов

Настоящая практическая работа, как и предыдущие, продолжает последовательно знакомить обучающихся с эффектами взаимного влияния сигналов и помех аддитивно складывающихся в канале передачи данных. В зависимости от того, что является сигналом, а что помехой, применяются различные методы и приемы обработки сигналов, направленные на восстановление исходного сигнала несущего полезную информацию в канале связи.

Для рассмотрения в практической работе введен составной сигнальный процесс, образующийся в канале передачи данных в результате аддитивного сложения двух сигналов:

$$A_{kan} = K_s * A_s + K_N * A_N$$

- детерминированного периодического или линейного сигнала A_s, аналогичного сигналам изучаемым во второй практической работе со следующими формами:
  - синусоидального сигнала,
  - прямоугольного сигнала,
  - треугольного симметричного сигнала,
  - линейно нарастающего сигнала;
- случайного шумоподобного сигнала A_N, аналогичного сигналам изучаемым в третьей практической работе, различающихся следующими законами плотностей распределения амплитуд:
  - равномерная плотность распределения,
  - нормальная плотность распределения,
  - экспоненциальная плотность распределения;

где K_s и K_N - коэффициенты, задающие амплитудные соотношения сигналов.

Рассмотрим некоторые особенности сигнальных представлений в зависимости от их предназначения и использования моделей в канале связи.

Модели представления аддитивных помех

В соответствии с моделями сигналов, модели помех должны наилучшим образом соответствовать реальной ситуации и соотношениям в канале связи и удовлетворять несколько противоречивым требованиям, а именно:

- учитывать особенности моделируемых помех по возможным факторам воздействия на полезный сигнал;
- быть универсальной моделью, не усложнять свое последующее использование в других аналогичных задачах.

Модели помех традиционно сводят к стационарным и нестационарным шумам или к сигналам со случайными параметрами. В практических и модельных расчетах используют гауссовские или негауссовские помехи. Гауссовские помехи обычно представлены "белым"или "квазибелым"шумом. Негауссовские помехи используют следующие модели:

- прямые вероятностные модели — задаются плотностями вероятностей выборок отсчетов (например, модель независимых отсчетов, образуемая суммарными значениями одновершинных (унимодальных) квазигауссовских распределений; модель гауссовской помехи со случайной интенсивностью; гауссовско-экспоненциальная модель);
- локально-вероятностные модели — задаются плотностями вероятности выборок в небольшой окрестности возможных значений, может быть использована степенная аппроксимация (обычно не выше квадратичных членов), используется в случаях, когда мощность ожидаемого сигнала много меньше мощности помехи;
- моментно-кумулянтные модели — задаются введением характеристических функций, моментов и кумулянтов плотности вероятности (их используют вместо вероятностных описаний при синтезе систем обработки сигналов в системах управления, автоматического регулирования и пр.);
- марковские модели — на базе дискретных марковских моделей с условными плотностями вероятностей отсчетов (используются для облегчения расчетов при локально-оптимальных модельных описаниях и представлениях);
- полигауссовские и родственные им модели — аппроксимируют заданные плотности вероятности линейными комбинациями конечного числа гауссовских плотностей, используются для робастных алгоритмов обработки.

Для моделирования оптических сигналов и помех различают додетекторный и последетекторный анализ оптических систем с введением:

- волновых моделей для додетекторной обработки световых полей и их интенсивностей,

- дискретных моделей выходного тока фотоприемника для последетекторной обработки.

С точки зрения дальнейшей обработки сигналов в приемных трактах систем передачи с целью улучшения отношения сигнал/помеха различают неадаптивную и адаптивную обработку. Неадаптивная обработка всегда рассчитывается на заранее известную типовую ситуацию. Адаптивные методы обычно требуют оценки текущей ситуации — измерений параметров сигналов и в соответствии с полученными результатами выполняют дальнейшую обработку по заданным алгоритмам или задают новый сигнал и правила его обработки для всего тракта передачи/приема.

Для улучшения отношения сигнал/помеха в трактах систем передачи данных применяют компенсацию помех на основе устройств амплитудной, временной и частотной режекции сигналов, объединяя их в единые системы или устройства.

Сигнальные амплитудные признаки воздействия помехи:

- взаимное перекрытие распределений амплитуд сигнала вследствие большого динамического диапазона флюктуаций при недостаточном (малом) времени усреднения;
- нестабильность приемного (измерительного) тракта.

4.2.2. Воздействие помех на информационные сигналы систем передачи

Помеха "белый"шум с заданной плотностью мощности и неограниченным спектром

Такая помеха почти всегда воздействует на исходный информационный сигнал, так как обусловливается собственными шумами приемника, атмосферными шумами и прочими факторами, а система передачи информации, как правило, строится так, чтобы обеспечивать оптимальный прием сигналов на фоне этих помех. Оптимальными для этих условий будут приемники, использующие корреляторы или согласованные фильтры, в которых достоверность приема будет зависеть только от энергии сигнала. Характер отклика оптимального приемника на информационный сигнал определяется его дискретной функцией автокорреляции или функцией неопределенности, а характер отклика на другие сигналы будет определятся дискретной функцией взаимной корреляции. Из этого следует важный вывод, что для систем передачи информации шумоподобные сигналы (ШПС) обычно не дают выигрыша при приеме на фоне флюктуационных помех, так как длительность сигнала T_s определяется скоростью передачи информации и его энергия остается неизменной при формировании как простого, так и шумоподобного сигнала.

Работа рассматривает вариант, когда детерминированный сигнал является информационным, а случайный шумоподобный сигнал — шумовым помеховым.

Узкополосная помеха

Такие помехи обычно не подобны применяемому сигналу и представляют собой периодические колебания, спектр которых сосредоточен в узкой полосе частот. Они возникают в процессе работы других систем в общем диапазоне частот и оказывают влияние на информационный сигнал, если параметры помехи коррелируют с сигналом в амплитудной и временной зависимости и могут не оказывать влияния на сигнал, если ее мощность относительно невелика и параметры слабо флюктуируют. Существуют алгоритмы обработки позволяющие скомпенсировать такую некоррелированную помеху, и чем уже полоса помехи, тем эффективней будет выигрыш в помехоустойчивости для информационного сигнала.

Работа рассматривает вариант, когда случайный шумоподобный сигнал является информационным, а детерминированный периодический сигнал — узкополосной помехой.

Импульсная помеха

Эти помехи появляются в следствии работы широко используемых импульсных систем в том же диапазоне частот. Их влияние оценивается взаимокорреляционной функцией и средней мощностью помехи за время действия информационного сигнала. Обычно спектр действия такой помехи перекрывает весь спектр сигнала и отличается от него фазами частотных составляющих. Воздействие импульсных помех на информационные сигналы в рамках коррелированных с сигналом интервалов и диапазонов приводит к значительному ухудшению отношения сигнал/помеха, а порой и к полной потери информационных признаков — параметров сигнала. Нередко мощная импульсная помеха полностью блокирует канал передачи данных за счет очень высокого амплитудного уровня на входе приемного устройства.

Варианты воздействия импульсных помех на информационный сигнал в настоящей работе не рассматриваются.

4.3. Варианты для выполнения задания

4.3.1. Задание практической работы

Практическая работа рассматривает два случая:

1. **Нечетные варианты**: информационным сигналом является детерминированный периодический сигнал, а шумовой помехой — случайный шумоподобный сигнал с параметрами в соответствии с вариантом задания.

2. **Четные варианты**: информационным сигналом является случайный шумоподобный сигнал, а узкополосной помехой — детерминированный периодический сигнал с параметрами в соответствии с вариантом задания.

Для любого случая сигнал/шум (сигнал/помеха) необходимо смоделировать исходные сигналы в соответствии с параметрами варианта задания. Для случайного шумоподобного сигнала — непрерывный стационарный случайный процесс (СП), мгновенные значения которого распределены как амплитуда A_p случайной величины (СВ) в интервале $[A_{Min};A_{Max}]$ по заданному закону для 3-х случаев распределения - равномерное, нормальное, экспоненциальное. Для детерминированного периодического сигнала выполнить моделирование сигнала A_s следующей формы с параметрами в соответствии со своим вариантом:

- синусоидального сигнала,
- прямоугольного сигнала,
- треугольного симметричного сигнала,
- линейно нарастающего сигнала.

Выполнить аддитивное сложение информационного и помехового сигналов в канале передачи данных с указанными в задании амплитудными уровнями.

$$A_{kan} = K_s * A_s + K_p * A_p,$$

где K_s и K_p - коэффициенты, задающие амплитудные соотношения сигналов.

Для информационного сигнала амплитудный коэффициент задавать в соответствии с вектором значений $[0.5, 1]$.

Для помехи амплитудный коэффициент задавать в соответствии с вектором значений $[0.15, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$.

Смоделировать канальный сигнал, оценить и исследовать представления и характеристики полученного сигнала для аналогового представления, аналогично сигнальным представлениям в третьей практической работе, а именно:

1. Временное представление в аналитической форме (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
2. Спектральное представление аналитического сигнала в виде амплитудного спектра (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
3. Спектральное представление амплитудного и фазового спектра (представить в виде графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).
4. Определить и представить спектральную плотность мощности сигналов в виде периодограммы Уэлча.
5. На каждом графике для каждого закона распределения и каждой формы сигнала/помехи проанализировать и обозначить по своему выбору ха-

рактерные значения параметров, определяющие вид представления и сигнальные особенности в соответствии с вариантом.

Для каждого канального сигнала выполнить дискретизацию и квантование в двуполярном цифровом представлении с минимальной постоянной составляющей в соответствии с заданием варианта и получить следующие представления для дискретной формы двуполярного квантованного сигнала:

1. Временное представление в аналитической форме (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
2. Спектральное представление амплитуды и фазы аналитического сигнала в виде амплитудного и фазового спектра (представить в виде графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).
3. Спектральное представление амплитудного и фазового спектра (представить в виде графиков с параметрами в соответствии со своим вариантом).
4. Определить и представить спектральную плотность мощности сигналов в виде периодограммы Уэлча (представить в виде графика с параметрами в соответствии со своим вариантом).
5. На каждом графике для каждого закона распределения сигнала обозначить характерные значения параметров, определяющие вид представления и сигнальные особенности в соответствии с вариантом.

Для каждого канального сигнала в аналоговом виде и дискретного квантованного двуполярного канального сигнала найти градиент и дискретный оператор Лапласа. Представить сигналы на временном графике реализации синхронно с канальным аналоговым и дискретным сигналом.

По результатам всех полученных реализаций *построить графики функциональной зависимости сигнал/помеха* от уровня помехи для фиксированных уровней информационного сигнала при $K = [0.5, 1]$ раздельно для соотношения в разах и [дБ] для аналогового и дискретного квантованного канальных сигналов (уровень помехи использовать в соответствии с рекомендованным вектором амплитудного коэффициента помехи).

Сравнить и проанализировать виды сигнального представления для всех полученных вариантов канального сигнала и графики отношений сигнал/помеха. ОБЯЗАТЕЛЬНО указать и объяснить различия характерных параметров на графиках канальных сигналов.

4.3.2. Варианты заданий практический работы

Вариант задания выбирается по номеру в журнале группы.

Таблица 4.1

Исходные данные сигнальных параметров.

№ варианта	N	A_{Min}	A_{Max}	dA	dF
1	3000	1.8	60	0.2	1000
2	2400	-8	26	0.15	4000
3	2500	-24	16	0.25	5000
4	3500	1	126	0.5	400
5	4000	2.3	76	0.45	2000
6	1500	-118	126	0.35	3000
7	4500	37	129	0.23	4000
8	3500	1.6	16	0.05	1000
9	1000	-2.6	26	0.15	2000
10	2000	3.1	46	0.25	5000
11	4500	-0.8	9.6	0.02	4000
12	2500	-0.8	26	0.15	1000
13	2800	4.1	216	0.35	4000
14	3600	-234	250	0.5	2000
15	6000	0.5	26	0.15	600
16	3000	-3.8	33	0.26	3000
17	4000	-8.5	26	0.18	5000
18	5000	22	56	0.34	2000
19	2800	3.7	26	0.12	3000
20	4400	-28	5	0.15	4000
21	5600	-18	-2.3	0.05	1000
22	2200	-0.8	2.6	0.01	1000
23	2600	-81	-26	0.25	3000
24	2400	4.8	46	0.42	2000
25	2500	-30	30	0.15	4000
26	2600	-8	96	0.25	5000
27	3400	2	41	0.12	4000
28	3500	-2.8	16	0.1	2000
29	4200	0.75	12	0.1	1000
30	4400	-0.5	14	0.05	4000

4.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).

2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.

3. Подготовить для расчетов систему вычислений Octave. Загрузить в рабочие каталоги системы Octave программы моделирования и исследования канальных сигналов $progPR-4-TSiUPD.m$ — для нечетных вариантов и $progPR-4-SP-TSiUPD.m$ — для четных вариантов.

4. По очереди запускать программы на исполнение, вводить исходные данные своего варианта, исследовать сигналы получением нужных по зада-

нию реализаций, сохранять файлы результатов для нужных сигнальных реализаций. Можно сохранять все реализации, но помним, что файлы переписываются каждый раз заново по результатам текущей реализации. Результаты сохраняются в текстовом, а графики в pdf-формате.

5. Произвести все необходимые расчеты в соответствии с заданием и нанести значения на графики. Записать и представить в аналитическом виде необходимые выражения и в числовом виде результаты расчетов.

6. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

7. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны наименование работы и учебной дисциплины, цель, номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося. Рекомендуется использовать утвержденные образцы титульных листов.

8. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется индивидуально. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave. Программы расчетов в отчет включать **НЕ НУЖНО!** Допускается модификация текстов программ. Все результаты **ОБЯЗАТЕЛЬНО** должны быть представлены преподавателю в документальном или письменном виде с обязательными атрибутами идентификации — номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

4.5. Контрольные вопросы

1. Что такое помеха, чем она характеризуется?

2. Какие бывают помехи, перечислите и объясните их влияния на информационный сигнал?

3. Что такое взаимокорреляционная функция, объясните ее свойства?

4. Поясните процедуры дискретизации и квантования сигналов.

5. В каких эффектах проявляется влияние помех на сигналы в каналах передачи данных?

Список использованных источников

1. Емельянов, Г. А., Шварцман В. О. Передача дискретной информации: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1982. — 240 с.

2. Олифер, В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы : учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер. — СПб. : Питер, 2012. — 943 с.

Владимиров Сергей Александрович

ТЕОРИЯ, СИСТЕМЫ И УСТРОЙСТВА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Практикум

Редактор *Х. Х. Ххххххххххх*

План изданий 20ХХ г., п. ХХ

Подписано к печати ХХ.ХХ.ХХХХ
Объем Х,0 печ. л. Тираж 10 экз. Заказ ХХХХ

Редакционно-издательский отдел СПбГУТ
193232 СПб., пр. Большевиков, 22
Отпечатано в СПбГУТ