

Лекция

по учебной дисциплине «Теория, системы и устройства передачи данных»
ст. преп. каф. СС и ПД Владимиров Сергей Александрович

Тема: **Сигналы систем и устройств передачи данных. Модуляция и манипуляция, их разновидности, методы получения, модельное представление.**

Лекция: **Дискретные сигналы. Модели и представления дискретных сигналов. Спектральное представление и корреляционные функции.**

Учебные вопросы:

1. Дискретные сигналы и их спектры.
2. Дискретизация периодических сигналов. ДПФ и БПФ. Дискретная свертка.
3. Теория z-преобразования. Основы корреляционного анализа. АКФ и ВКФ.

Литература:

1. Емельянов Г. А., Шварцман В. О. Передача дискретной информации: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1982. — 240 с.
2. Олифер В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы : учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер. – СПб. : Питер, 2012. – 943 с.

Дискретные сигналы и их спектры

Дискретизация непрерывного сигнала традиционно рассматривается нами, как аналитическое представление этого сигнала с помощью совокупности отсчетов в дискретные моменты времени nT_d . Выбор шага дискретизации $\Delta = T_d$ проводится на основании теоремы отсчетов.

Саму процедуру дискретизации, а именно взятие выборок, производит обычно электронный ключ. Модель на рисунке 1 рассматривает это как умножение сигнала $x(t)$ на вспомогательную периодическую последовательность $\eta(t)$ коротких тактовых импульсов — обычно прямоугольные импульсы с очень маленькой длительностью τ_0 , по сравнению с шагом дискретизации $\Delta = T_d$ и сам сигнал представляется как $x_T(t) = x(t) * \eta(t)$.

При этом $\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta)$ вводим как обобщенную функцию называемую *дискретизирующей последовательностью*.

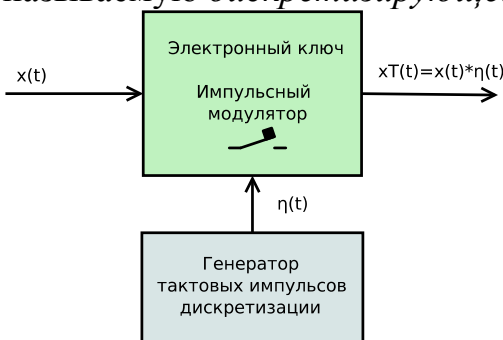


Рис. 1. Схема дискретизации непрерывного сигнала.

Дискретный сигнал $x_T(t)$ представляет собой функционал, определенный на множестве всевозможных аналоговых сигналов $x(t)$ и равный скалярному произведению функции $x(t)$ и $\eta(t)$:

$$x_T(t) = (x(t), \eta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_d) dt .$$

Модулированные импульсные последовательности

Дискретные сигналы в радиотехнических системах используются достаточно давно и имеют наименование по классификатору как сигналы с *импульсной модуляцией*. Этот вид модуляции отличается тем, что в качестве «несущей» вместо гармонического сигнала служит периодическая последовательность коротких импульсов. Импульсный модулятор (рис. 1) представляет собой устройство с двумя входами, на один из которых подается исходный аналоговый сигнал $x(t)$. На другой вход поступают короткие синхронизирующие импульсы с интервалом повторения T_d . Модулятор построен так, что в момент подачи каждого синхронизирующего импульса фактически происходит измерение мгновенного значения сигнала $x(t)$. На выходе модулятора возникает последовательность импульсов, каждый из которых имеет площадь, пропорциональную соответствующему отсчетному значению аналогового сигнала.

Сигнал $x_T(t)$ на выходе импульсного модулятора принято называть *модулированной импульсной последовательностью (МИП)*. Отсюда можно сделать вывод, что дискретный сигнал является математической моделью МИП.

В общем, с физической точки зрения характер импульсов, из которых складывается МИП, не имеет большого значения. В первом случае импульсы могут иметь одинаковую длительность, а их амплитуда будет пропорциональна отсчетам значений дискретизируемого сигнала. Этот вид преобразования непрерывного сигнала называется *амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ)*. Чаще применяется другой способ — *широтно-импульсная модуляция (ШИМ)*. Когда амплитуда импульсов на выходе модулятора постоянна, а вот их длительность τ (ширина) пропорциональна мгновенным значениям амплитуды аналогового колебания.

Способ импульсной модуляции зависит от ряда технических соображений и схемной реализации, которая отражает характерные особенности передаваемых сигналов. Например, использовать АИМ в случае, когда исходный сигнал изменяется в очень широких пределах, а значит, имеет широкий динамический диапазон нецелесообразно, потому, что для обеспечения неискаженной передачи этого сигнала потребуется передатчик со строго линейной амплитудной характеристикой. Реализация такого передатчика — самостоятельная, технически сложная проблема.

А вот ШИМ - преобразование не предъявляет высоких требований к линейности амплитудных характеристик передающего устройства. Но их схемная реализация обычно несколько сложнее по сравнению с системами АИМ. Кроме АИМ и ШИМ, существует и *ЧИМ - частотно-импульсная модуляция*, когда пропорционально амплитуде изменяется частота следования, и *ВИМ - время-импульсная модуляция*, когда пропорционально амплитуде сигнала изменяется

время задержки импульса τ от начала тактирования в периоде T_d (ВИМ очень часто встроена в ШИМ).

Математическая модель идеальной МИП представляется следующей формулой динамического представления сигнала:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau .$$

Так как МИП определена лишь в точках $t_n = n\Delta = nT_d$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), интегрирование в формуле заменяем суммированием по индексу n . Роль дифференциала $d\tau$ будет играть интервал (шаг) дискретизации $\Delta = T_d$. При этих условиях математическая модель модулированной импульсной последовательности, образованная бесконечно короткими импульсами, будет задана выражением

$$x_{[МИП]}(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - n\Delta) = T_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT_d)$$

где $x_n = x(n\Delta) = x(nT_d)$ — выборочные значения аналогового сигнала.

Очень значимые результаты для телекоммуникационной отрасли были получены при применении импульсно-модулированных сигналов в многоканальных системах связи с временным разделением каналов. Такие системы с импульсной модуляцией позволили добиться значительно большей помехоустойчивости по сравнению с той, которая была достигнута при использовании в качестве несущего колебания обычного гармонического сигнала.

Спектральная плотность модулированной импульсной последовательности

Рассмотрим спектр дискретного сигнала на выходе идеального импульсного модулятора в соответствии с последним выражением матмодели МИП, который с точностью до коэффициента пропорциональности Δ равен произведению функции $x(t)$ и дискретизирующей последовательности $\eta(t)$

$x_{МИП}(t) = \Delta x(t) * \eta(t)$, с дополнительным условием, что согласно использованной идеальной модели, значения сигнала в паузах условно считаются равными нулю.

Известно, что спектр произведения двух сигналов пропорционален свертке их спектральных плотностей. Поэтому, если известны законы соответствия сигналов и спектров: $x(t) \leftrightarrow S_x(\omega)$, $\eta(t) \leftrightarrow S_\eta(\omega)$,

значит спектральная плотность МИП будет

$$S_{МИП}(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\xi) S_x(\omega - \xi) d\xi .$$

Для нахождения спектра $S_\eta(\omega)$ разложим $\eta(t)$ в комплексный ряд Фурье:

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi n t}{\Delta}} , \text{ где коэффициенты ряда } (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$C_n = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{\Delta}} dt = \frac{1}{\Delta} .$$

Используя разложение получаем спектр дискретизирующей последовательности $\eta(t)$

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}) = \frac{2\pi}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi n}{T_d}) ,$$

который состоит из бесконечной совокупности дельта-импульсов в частотной плоскости и полученный спектр есть ничто иное, как периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{\Delta}$ [сек⁻¹].

После подстановки и приведения формул получаем для спектра МИП

$$S_{МИП}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(w - \frac{2\pi n}{\Delta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(w - \frac{2\pi n}{T_d}) .$$

Итоговый спектр сигнала, полученного в результате идеальной дискретизации бесконечно короткими стробирующими импульсами, представляет собой сумму бесконечного числа «копий» спектра исходного аналогового сигнала.

Копии спектра размещены на оси частот через одинаковые интервалы $\frac{2\pi}{\Delta}$, равные значению угловой частоты первой гармоники дискретизирующей импульсной последовательности (частоте дискретизации). Спектр основного сигнала называется *основным спектром*, а его бесконечное множество повторений – *дублирующими спектрами*. Помним, что длительность прямоугольных импульсов дискретизирующей последовательности $\eta(t)$ формирующей выборки для идеальной модели, стремится к нулю.

Восстановление исходного непрерывного сигнала по модулированной импульсной последовательности

Используемая модель предполагает, что вещественный сигнал $x(t)$ имеет низкочастотный спектр, симметричный относительно точки $w=0$ и ограниченный верхней граничной частотой w_g . Также полагаем, что теорема отсчетов выполняется и отдельные копии спектра $S_x(w)$ не накладываются друг на друга. Отсюда следует, что аналоговый сигнал с таким спектром, подвергнутый импульсной дискретизации, можно совершенно точно восстановить с помощью идеального ФНЧ, на вход которого подана импульсная последовательность вида

$$x_{МИП}(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - n\Delta) = T_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT_d) .$$

Физически это означает, что мы вырезаем из периодического спектра нужную часть. При этом наибольший допустимый интервал дискретизации согласованный с теоремой Котельникова будет $\Delta = T_d = \frac{\pi}{w} = \frac{\pi}{2f_g}$.

Запишем частотный коэффициент передачи для идеального фильтра, восстанавливающего непрерывный сигнал,

$$K(jw) = \begin{cases} 0, & w < -w_g, \\ K_0, & -w \leq w \leq w_g, \\ 0, & w > w_g. \end{cases}$$

Найдем импульсную характеристику этого фильтра как обратное ПФ

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(jw) e^{jwt} dt = \frac{K_0 w_g}{\pi} \frac{\sin w_g t}{w_g t} .$$

Представляя МИП-сигнал как взвешенную сумму дельта-импульсов, находим отклик на выходе восстанавливающего фильтра как функцию свертки

$$\hat{x}(t) = \frac{K_0 w_\epsilon \Delta}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin w_\epsilon (t - n \Delta)}{w_\epsilon (t - n \Delta)} = \frac{K_0 w_\epsilon T_d}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin w_\epsilon (t - n T_d)}{w_\epsilon (t - n T_d)} .$$

Полученный сигнал будет с точностью до масштабного коэффициента повторять исходное колебание с ограниченным спектром. Понятно, что идеальный ФНЧ физически нереализуем и может использоваться лишь как теоретическая модель для объяснения принципа восстановления сигнала по его дискретным импульсным отсчетам. Реальный ФНЧ имеет АЧХ, которая охватывает несколько лепестков спектральной диаграммы МИП, либо, концентрируясь вблизи нулевой частоты, получается значительно уже центрального лепестка спектра.

Вполне достойные результаты по восстановлению можно получить, используя в качестве восстанавливающего фильтра ФНЧ с характеристикой Баттерворта достаточно высокого порядка ($p > 5$) (Lab 1, БИХ (ИР), $p=6$).

Самым простым случаем будет использование в качестве восстанавливающего фильтра на выходе РС-цепи.

Во всех случаях реальный фильтр всегда неизбежно искажает исходное колебание.

Определение спектра аналогового сигнала по совокупности дискретных отсчетов

Полученное МИП-представление сигнала, можно использовать не только для восстановления аналогового сигнала, но и для определения его спектральной плотности. Для этого необходимо связать спектральную плотность МИП с отсчетными значениями:

$$S_{МИП}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{МИП}(t) e^{-jw t} dt = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - n \Delta) e^{-jw t} dt = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jw n \Delta} .$$

Полученную спектральную плотность $S_{МИП}(w)$ приравняем к другому ранее полученному соотношению

$$S_{МИП}(w) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jw n \Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(w - \frac{2\pi n}{\Delta}) ,$$

и получим известную *формулу суммирования Пуассона*.

Определить однозначно функцию $S_x(w)$, зная левую часть равенства из результатов измерений, вообще говоря, невозможно ввиду эффекта наложения копий спектра. Исключение составляет случай, при котором заранее известно, что исходный сигнал $x(t)$ имеет спектр низкочастотного вида, удовлетворяющий условию теоремы Котельникова. При строгом соблюдении этого ограничения спектр аналогового сигнала

$$S_x(w) = \begin{cases} 0, & w < \frac{-\pi}{\Delta}, \\ \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jw n \Delta}, & \frac{-\pi}{\Delta} \leq w \leq \frac{\pi}{\Delta}, \\ 0, & w > \frac{\pi}{\Delta}. \end{cases}$$

Дискретизация периодических сигналов

Рассмотренная выше модель дискретного сигнала как МИП $x_{МИП}(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - n\Delta)$ предполагает, что отсчетные значения аналогового колебания $x(t)$ могут быть получены в неограниченном числе точек на оси времени. Но, получить практически такие сведения о сигнале, понятно невозможно, потому что обработка всегда ведется на конечном интервале времени.

Теперь рассмотрим особенности спектрального представления дискретного сигнала, который задан на ограниченном отрезке $[0, T]$ своими отсчетами $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ взятыми соответственно в моменты времени $0, \Delta, 2\Delta, \dots, (N-1)\Delta$; полное число таких отсчетов $N = T/\Delta$. Массив этих чисел, вещественных или комплексных, является единственным источником сведений о спектральных свойствах сигнала $x(t)$.

Другое модельное представление и соответственно методика изучения таких дискретных сигналов заключена в том, что полученная выборка отсчетных значений мысленно повторяется бесконечное число раз. В результате конечный сигнал становится периодическим, а значит бесконечным. И уже такому сигналу можно поставить в соответствие некоторую известную математическую модель, далее воспользоваться разложением в ряд Фурье и найти соответствующие амплитудные коэффициенты, совокупность которых и будет образовывать спектр дискретного периодического сигнала.

Дискретное преобразование Фурье

Продолжаем использовать модель последовательности дельта-импульсов и поставим в соответствие исходному колебанию $x(t)$ его дискретное МИП-представление:

$$x_{МИП}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta) .$$

Представим эту же дискретную модель как комплексный ряд Фурье:

$$x_{МИП}(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}} \text{ с коэффициентами } C_n = \frac{1}{T\Delta} \int_0^T x_{МИП}(t) e^{\frac{-j2\pi nt}{T}} dt .$$

Подставляем в C_n $x_{МИП}(t)$, вводим $\xi = t/\Delta$, используем фильтрующее свойство дельта-функции получаем последовательность спектральных коэффициентов дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} .$$

Свойства ДПФ

1. Дискретное преобразование Фурье — это линейное преобразование, т.е. сумме сигналов будет равна сумма их ДПФ.
2. Число различных коэффициентов $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$ вычисляемых по формуле C_n , равно числу N отсчетов сигнала за период; при $n = N$ коэффициент $C_N = C_0$.
3. Коэффициент C_0 (постоянная составляющая сигнала) является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

4. Если длина выборки сигнала N — четное число, то количество коэффициентов

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (-1)^k$$

5. Для случая когда значения отсчетов сигнала x_k — вещественные числа, коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{\frac{-j2\pi(N-n)k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = C_n^* .$$

Полагаем, что коэффициенты $C_{N/2+1}, \dots, C_{N-1}$ соответствуют отрицательным частотам. При изучении полученного амплитудного спектра сигнала они не дают новых сведений, так как по уровню повторяют положительные.

Восстановление исходного сигнала по ДПФ

Когда на базе отсчетов сигнала $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ получены коэффициенты ДПФ $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N/2}$, то по ним всегда можно восстановить исходный сигнал $x(t)$ с ограниченным спектром, который был дискретизирован. Ряд Фурье этого сигнала принимает вид конечной суммы:

$$x(t) = C_0 + 2|C_1| \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1\right) + 2|C_2| \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + \varphi_2\right) + \dots + 2|C_{N/2}| \cos\left(\frac{N\pi t}{T} + \varphi_{N/2}\right) ,$$

где $\varphi_i = \arg C_i$ — фазовый угол коэффициента ДПФ.

Следует указать, что восстановление непрерывного сигнала по верхней формуле это не приближенная, а точная операция, полностью эквивалентная получению текущих значений сигнала с ограниченным спектром по его отсчетам. Поэтому процедура, использующая ДПФ, в ряде случаев предпочтительнее. Она приводит к конечным суммам гармоник, в то время как ряд Котельникова для периодического сигнала принципиально должен содержать бесконечное число членов.

Обратное дискретное преобразование Фурье

Обратную задачу дискретного спектрального анализа можно поставить и несколько иначе. Так же считаем, что коэффициенты C_n ДПФ, заданы.

Тогда для формулы задаем $t = k\Delta$ (шаг дискретизации) и учитываем, что суммируется лишь конечное число членов ряда, которые соответствуют гармоникам, содержащимся в спектре исходного сигнала. Отсюда, получаем формулу для вычисления отсчетных значений сигнала:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j \frac{2\pi nk}{N}},$$

которая и является формулой *обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ)*.

Две полученные выше формулы взаимно дополняют друг друга, как дискретные аналоги обычной пары преобразований Фурье для непрерывного сигнала.

Сигнальные базисы

Дискретный спектральный анализ в настоящее время один из самых распространенных методов для расчетных моделей с применением процессорных вычислений. Алгоритмы вычислений ДПФ и БПФ отработаны и встроены в большое количество прикладных математических пакетов.

МИП-сигнал представляет собой лишь одну из возможных моделей дискретного сигнала. Модулированные последовательности АИМ или ШИМ широко применяются и для описания импульсных колебаний.

При обработке сигналов в системах передачи данных и радиотехнических системах с помощью вычислительных устройств дискретный сигнал обычно выступает не как последовательность импульсов, а как упорядоченная последовательность чисел. Роль времени при этом играет целая переменная в виде номера соответствующего отсчета.

ДПФ можно рассматривать и как более глубокую интерпретацию, если последовательность отсчетов сигнала $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ рассматривать как вектор в N -мерном евклидовом пространстве. В таком пространстве имеется N линейно-независимых векторов

$$e_0 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots$$

$$e_{N-1} = (0, 0, 0, \dots, 1),$$

образующих базис, который называют *естественным базисом*.

Исходная последовательность $x = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e_k$, представлена отсчетами x_k , как

проекциями вектора x на соответствующие базисные векторы. Так как пространство евклидово, вводится норма этого вектора как $\|x\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k x_k^* \right)^{\frac{1}{2}}$ и

скалярное произведение двух векторов x и y $(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_k^*$.

Векторы x и y ортогональны, если $(x, y) = 0$.

Кроме естественного базиса в N -мерном евклидовом пространстве можно ввести много других базисных систем.

А именно например несколько ранее мы ввели *базис Фурье*, элементами которого были векторы

$$\begin{aligned} f_0 &= (1, 1, 1, \dots, 1), \\ f_1 &= (1, e^{j2\pi/N}, e^{j4\pi/N}, \dots, e^{j2(N-1)\pi/N}), \\ f_2 &= (1, e^{j4\pi/N}, e^{j8\pi/N}, \dots, e^{j4(N-1)\pi/N}), \\ &\vdots \\ f_{N-1} &= (1, e^{j2(N-1)\pi/N}, e^{j4(N-1)\pi/N}, \dots, e^{j4(N-1)(N-1)\pi/N}), \end{aligned}$$

k -ой компонентой n -го базисного вектора является число $\exp(j2\pi nk/N)$. При любых n и k это число будет одним из возможных значений корня N -й степени из единицы.

Скалярное произведение элементов базиса Фурье равно

$$(f_m, f_l) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(m-l)k/N} = \begin{cases} N & m=l, \\ 0 & m \neq l. \end{cases}$$

верхнее равенство очевидно; сумма обращается в нуль при $m \neq l$, поскольку все слагаемые являются комплексными числами с единичным модулем и линейно нарастающим аргументом. При суммировании соответствующие векторы всегда образуют на комплексной плоскости правильный замкнутый многоугольник.

Отсюда, базис Фурье ортогонален, но не нормирован к единичной шкале, поскольку квадрат его нормы $\|f_m\|^2 = N, m = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Коэффициенты разложения вектора x по элементам базиса Фурье:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} C_k f_k. \text{ Для нахождения умножим скалярно обе части равенства на}$$

$$\text{базисный вектор } f_n \text{ с фиксированным номером } n: (x, f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k (f_k, f_n).$$

Так как базис Фурье ортогонален, то в правой части отличным от нуля окажется лишь слагаемое с номером $k=n$ — $(x, f_n) = C_n \|f_n\|^2$, отсюда

$$C_n = \frac{1}{\|f_n\|^2} (x, f_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi nk/N},$$

что полностью совпадает с формулой, полученной на базе модели МИП-сигнала.

Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Для вычисления ДПФ или ОДПФ последовательности из N элементов, требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами. Для больших длин обрабатываемых массивов порядка тысячи или более использование прямых алгоритмов дискретного спектрального анализа в реальном масштабе времени затруднительно из-за ограниченного быстродействия вычислительных устройств.

Выходом из положения стали *алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ)*, разработка которых началась примерно после 1960 года. Существенно сократить число выполняемых операций удается за счет того, что обработка входного массива сводится к нахождению ДПФ (или ОДПФ) массивов с меньшим числом членов. Это связано со свойствами симметрии тригонометрических функций и применением ранее известного метода "бабочки", butterfly, который заключается в использовании ранее сделанных вычислений для получения соседних значений сложением или вычитанием уже полученных. Т.е. вводится этапная рекуррентность вычислений. Это позволяет ускорить вычисления и контролировать ошибки. Похожую разновидность интерполяции применял еще г-н Гаусс применительно к вычислениям по Лагранжу.

В основе всех алгоритмов БПФ, это существенно для метода БПФ, лежит число отсчетов $N = 2^p$, где p - целое число.

Входная последовательность x_k разбивается на две части — с четными и нечетными номерами: $\{x_k\}_{\text{чт}} = \{x_{2k}\}$, $\{x_k\}_{\text{нч}} = \{x_{2k+1}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$ n -й коэффициент разбивается на две половины и первая половина коэффициентов ДПФ исходного сигнала с номерами от 0 до $N/2-1$ выражается через коэффициенты ДПФ двух частных последовательностей:

$$C_n = C_{n\text{чт}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} C_{n\text{нч}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1.$$

Далее исходим из свойства, что последовательности коэффициентов, относящихся к четной и нечетной частям исходного массива, являются периодическими функциями с периодом $N/2$:

$$C_{n\text{чт}} = C_{n+N/2\text{чт}}, \quad C_{n\text{нч}} = C_{n+N/2\text{нч}}.$$

Кроме того, видим, что входящий в формулу множитель при $n \geq N/2$ преобразован как $e^{-j2\pi n/N}$ и $-e^{-j2\pi n/N}$.

Коэффициенты второй половины ДПФ находим из

$$C_n = C_{n\text{чт}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} C_{n\text{нч}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1.$$

Эти формулы для вычисления половин коэффициентов и лежат в основе алгоритма БПФ. Затем вычисления строятся по итерационному принципу: последовательности отсчетов с четными и нечетными номерами вновь разбивают на две части. Процесс продолжают до тех пор, пока не получится последовательность, состоящая из единственного элемента. Можно увидеть, что ДПФ этого элемента совпадает с ним самим.

Число операций для вычисления БПФ, оценивается как $N \log_2 N$.

Дискретная свертка

В дополнение к обычной свертке $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$, вводится

дискретная свертка $f(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{m-k}$, $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$, функция отсчеты которой связаны с отсчетами дискретных сигналов $x_d(t)$ и $y_d(t)$.

Выразим текущие отсчеты x_k и y_{m-k} как ОДПФ от их соответствующих спектров

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} e^{\frac{j2\pi nk}{N}}, \quad y_{m-k} = \sum_{l=0}^{N-1} C_{yl} e^{\frac{j2\pi l(m-k)}{N}}.$$

Подставим, упорядочим, используем свойство ортогональности, получим

$$f_m = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} C_{yn} e^{\frac{j2\pi mn}{N}}.$$

Исходя из того, что эта формула ОДПФ, делаем вывод, что коэффициенты преобразования Фурье свертки будут произведениями коэффициентов ДПФ свертываемых сигналов:

$$C_{fk} = C_{xk} C_{yk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Приведенный выше алгоритм свертки периодических сигналов иногда называют *круговой или циклической сверткой*.

Дискретная свертка имеет большое значение в теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. Получается, что если сигналы достаточно длинны (например, содержат несколько тысяч отсчетов), то для вычисления свертки целесообразно вначале найти их ДПФ, перемножить коэффициенты, а затем воспользоваться формулой, применив алгоритм БПФ. Этот способ вычислений более экономичен по количеству операций, чем прямое использование формулы свертки.

Теория z-преобразования

При анализе и синтезе дискретных и цифровых устройств широко используется так называемое z-преобразование, играющее по отношению к дискретным сигналам такую же роль, как интегральные преобразования Фурье и Лапласа по отношению к непрерывным сигналам. Рассмотрим основы теории этого функционального преобразования и некоторые его свойства.

Определение z-преобразования

Пусть $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ — числовая последовательность, конечная или бесконечная, содержащая отсчетные значения некоторого сигнала. Поставим ей в однозначное соответствие сумму ряда по отрицательным степеням комплексной переменной z :

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}.$$

Эта сумма, если она существует, называется *z-преобразованием* последовательности $\{x_k\}$. С математической точки зрения *z-преобразование* является производящей функцией исходной последовательности.

Целесообразность введения этого математического объекта связана с тем, что свойства дискретных последовательностей чисел можно изучать, исследуя их z -преобразования обычными методами математического анализа.

На основании введенной формулы ряда можно непосредственно найти z -преобразования дискретных сигналов с конечным числом отсчетов. Так, простейшему дискретному сигналу с единственным отсчетом $\{x_k\} = (1, 0, 0, \dots)$ соответствует $X(z) = 1$.

Или, например, $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$, тогда

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2} .$$

Сходимость ряда

Для ряда у которого число слагаемых бесконечно велико необходимо дополнительно исследовать его сходимость. Из теории функций комплексного переменного известно следующее. Когда коэффициенты рассматриваемого ряда удовлетворяют условию $|x_k| < MR^k$ при любых $k \geq 0$ и $M > 0$ и $R_0 > 0$ — постоянные вещественные числа \Rightarrow тогда исходный ряд

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

сходится при всех значениях z , таких, что $|z| > R_0$. В этой области сходимости сумма ряда представляет собой аналитическую функцию переменной z , не имеющую ни полюсов, ни существенно особых точек.

Следующий пример, дискретный сигнал $\{x_k\} = (1, 1, 1, \dots)$, образованный одинаковыми единичными отсчетами является моделью обычной функции включения. Его бесконечный ряд $X(z) = 1 + 1/z + 1/z^2 + \dots$ является суммой геометрической прогрессии и сходится при любых z в кольце $|z| > 1$. Суммируем прогрессию и получаем $X(z) = 1/(1 - 1/z) = z/(z - 1)$.

На границе области аналитичности при $z = 1$ эта функция имеет единственный простой полюс.

Аналогично получается z -преобразование бесконечного дискретного сигнала $\{x_k\} = (1, a, a^2, \dots)$, где a — некоторое вещественное число. Тогда

$$X(z) = 1/(1 - a/z) = z/(z - a).$$

Полученное выражение имеет смысл в кольцевой области $|z| > a$.

Z-преобразование непрерывных функций

Предполагаем, что отсчеты $\{x_k\}$ это значения непрерывной функции $x(t)$ в точках $t = k\Delta$, тогда любому сигналу $x(t)$ можно сопоставить его z -преобразование при выбранном шаге дискретизации:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta) z^{-k} .$$

Пример, если $x(t) = e^{(at)}$, то соответствующее ему z -преобразование

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(ak\Delta)} z^{-k} = \frac{z}{z - e^{(a\Delta)}} \text{ будет аналитической функцией при } |z| > e^{(a\Delta)} .$$

Обратное z-преобразование

Если дана $X(z)$ — функция комплексной переменной z , аналитическая в кольцевой области $|z| > R_0$. Замечательное свойство z-преобразования состоит в том, что функция $X(z)$ определяет всю бесконечную совокупность отсчетов (x_0, x_1, x_2, \dots) .

Для этого возьмем и умножим обе части исходного ряда на множитель z^{m-1} :

$$z^{m-1} X(z) = x_0 z^{m-1} + x_1 z^{m-2} + \dots + x_m z^{-1} + \dots,$$

а затем вычислим интегралы от обеих частей полученного равенства, взяв в качестве контура интегрирования произвольную замкнутую кривую, лежащую целиком в области аналитичности и охватывающую все полюсы функции $X(z)$. Обход контура интегрирования производим в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки. При этом используем фундаментальное положение, вытекающее из теоремы Коши:

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi j & n = -1, \\ 0 & n \neq -1. \end{cases}$$

Очевидно, что интегралы от всех слагаемых правой части обратятся в нуль, за исключением слагаемого с номером m , поэтому

$$x_m = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-1} X(z) dz.$$

Эта формула называется *обратным z-преобразованием*.

Связь с преобразованиями Лапласа и Фурье

Запишем для $t \geq 0$ сигнал идеальной МИП:

$$x_{МИП}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta).$$

Выполним преобразование его по Лапласу, получим изображение

$$F(p) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-pk\Delta}$$

которое непосредственно переходит в z-преобразование, если выполнить подстановку $z = e^{p\Delta}$. Если же положить $z = e^{jw\Delta}$, то выражение

$$S(w) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-jwk\Delta}$$

будет преобразованием Фурье импульсной последовательности.

Установленные преобразования позволяют проводить формальную аналогию между спектральными свойствами непрерывных и дискретных сигналов.

Свойства z-преобразования

Рассмотрим полезные свойства z-преобразования. Приведенные далее свойства имеют прямую аналогию со свойствами преобразований Фурье и Лапласа для аналоговых сигналов.

1. *Линейность*. Если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — дискретные сигналы, причем известны их соответствующие z-преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, то сигналу $\{u_k\} = \{\alpha x_k + \beta y_k\}$ будет соответствовать преобразование $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$ при любых постоянных α и β .

2. *Z-преобразование смещенного сигнала.* Если дискретный сигнал $\{y_k\}$, получается из дискретного сигнала $\{x_k\}$ путем сдвига на одну позицию такта в сторону запаздывания, т.е. когда $y_k = x_{k-1}$, то непосредственное вычисление z -преобразования дает следующий результат:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} X(z) .$$

Отсюда следует, что символ z^{-1} служит оператором единичной задержки (на один интервал дискретизации) в z -области.

3. *Z-преобразование свертки.* Если $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные сигналы, для которых определена свертка $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau$, то по аналогии к дискретным сигналам вводим дискретную свертку $\{f_k\}$ как последовательность чисел, общий член которой выражается

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Получим z -преобразование дискретной свертки:

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_{m-k} z^{-(m-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = X(z) Y(z)$$

Делаем вывод, что свертке двух дискретных сигналов соответствует произведение их z -преобразований. Такую дискретную свертку в отличие от круговой еще называют *линейной сверткой*.

Корреляционный анализ детерминированных сигналов

Кроме спектрального подхода к описанию сигналов, часто бывает необходима характеристика, дающая представление о некоторых свойствах сигнала, в частности о скорости изменения его во времени, а также о длительности сигнала без разложения его на гармонические составляющие. В качестве такой временной характеристики широко используется корреляционная функция сигнала. В применениях шумовых и шумоподобных сигналов наряду с полным описанием свойств таких случайных сигналов с помощью многомерных плотностей вероятности возможен также упрощенный подход, когда случайные процессы характеризуются своими моментными функциями. Теория случайных процессов, основанная на использовании моментных функций не выше второго порядка, получила название корреляционной теории. Далее будет показано, что между корреляционными и спектральными свойствами случайных сигналов существует глубокая и тесная связь. Поэтому применение корреляционного анализа тесно связано с методами оптимальной, согласованной и адаптивной фильтрации, с предсказанием (прогнозом) и сжатием сигналов, с шумоподобными сигналами и их обнаружением как в связных системах передачи данных, так и в радиотехнике вообще.

Корреляционная функция детерминированных сигналов конечной длительности

При рассмотрении детерминированного сигнала конечной длительности $x(t)$ корреляционная функция определяется следующим выражением:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t+\tau) d\tau ,$$

где аргумент τ – временной сдвиг сигнала. Корреляционная функция для каждого значения аргумента представляет собой скалярное произведение сигнала со сдвинутой во времени копией. Для вещественных функций обозначение комплексного сопряжения можно опустить.

Формула показывает, что $R_x(\tau)$ характеризует степень связи (корреляции) сигнала $x(t)$ со своей копией, сдвинутой на величину τ по оси времени, поэтому такая функция названа *автокорреляционной функцией (АКФ)*. Очевидно, что функция $R_x(\tau)$ достигает максимума при $\tau=0$, так как любой сигнал полностью коррелирован с самим собой. При этом

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) d\tau = E ,$$

т.е. максимальное значение корреляционной функции равно полной энергии сигнала. С увеличением τ функция $R_x(\tau)$ обычно убывает (не обязательно монотонно) и при относительном сдвиге сигналов $x(t)$ и $x(t+\tau)$ на время, превышающее длительность сигнала, обращается в нуль.

Из общего определения корреляционной функции видно, что безразлично, вправо или влево относительно своей копии сдвигать сигнал на величину τ . Поэтому выражение можно обобщить следующим образом:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau) d\tau .$$

Это равносильно утверждению, что $R_x(\tau)$ является четной функцией τ .

Корреляционная функция периодического сигнала

В случае периодического сигнала, энергия которого бесконечно велика, полученное выражение и определение корреляционной функции неприемлемо. В этом случае пользуются определением

$$R_{xT}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) d\tau$$

В этом определении корреляционная функция приобретает размерность мощности, причем $R_{xT}(0)$ равна средней мощности сигнала. Ввиду периодичности сигнала $x(t)$ усреднение произведения $x(t)x(t+\tau)$ или $x(t)x(t-\tau)$ по бесконечно большому отрезку T должно совпадать с усреднением по периоду сигнала T_x . Входящий в это выражение интеграл и будет корреляционной функцией сигнала на интервале T_x . Запишем соотношение $R_{xT}(\tau) = R_{xTx}(\tau) / T_x$.

Очевидно, что периодическому сигналу $x(t)$ соответствует и периодическая корреляционная функция $R_{xT}(\tau)$. Период функции $R_{xT}(\tau)$ совпадает с периодом T_x исходного сигнала $x(t)$.

Такая АКФ имеет физическую размерность мощности (средняя мощность, обычно U^2 , выделяемая на нагрузке в 1 Ом).

Наряду с корреляционной функцией часто используют ковариационную функцию, которая представляет собой корреляцию для переменной составляющей сигнала. Так, если из сигнала удалить постоянную составляющую $x(t)$ (вычесть среднее значение), то корреляционная функция для него называется *ковариационной функцией*.

Взаимная корреляционная функция

Для оценки связи между двумя различными сигналами $x(t)$ и $y(t)$ используется *взаимная корреляционная функция (ВКФ)*, определяемая общим выражением

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t + \tau) dt$$

Для вещественных функций сопряжение в формуле можно исключить.

Рассмотренная выше автокорреляционная функция является частным случаем функции ВКФ, когда сигналы одинаковы.

Связь между корреляционной функцией и энергетическим спектром сигнала

Методы корреляционного анализа хоть и являются отдельными обособленными способами проведения исследований, но математически и физически тесно связаны со спектральными характеристиками сигналов.

АКФ это по сути скалярное произведение $R_x(\tau) = (x(t), x(t-\tau))$ сигнального вектора $x(t)$ и его смещенной на τ копии.

Используя формулу Рэлея можно записать

$$R_x(\tau) = (x, x_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X^*(\omega) d\omega$$

Спектральная плотность для смещенного во времени сигнала будет $X_\tau(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega\tau}$, и отсюда $X_\tau^*(\omega) = X^*(\omega) e^{j\omega\tau}$.

Выходим на формулу обратного преобразования Фурье

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

Энергетический спектр связан с корреляционной функцией прямым преобразованием Фурье

$$|X(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Полученная функциональная связь имеет фундаментальное значение в корреляционной теории стационарных случайных процессов и называется *теоремой Винера–Хинчина*, устанавливающей однозначную взаимосвязь между функцией корреляции и СПМ. Это позволяет гибко производить оценки сигнальных параметров в каналах связи и управлять например, уровнем модуляции и пропускной способностью канала. Продолжая рассматривать этот пример можно сказать что, стационарные случайные процессы (воздействие на сигнал в канале передачи данных), вследствие инвариантности их вероятностных характеристик и их квазипериодическому характеру поведения применительно к начальной точке наблюдения, исследование стационарной функции времени можно заменить исследованием случайной функции другой переменной, которая имеет размерность частоты. Переходя от случайной функции частоты к среднему квадрату этой функции, получаем неслучайную функцию, называемую *спектральной плотностью мощности (СПМ)* или *энергетическим спектром*.

Ширина спектра сигнала — это интервал частот $\Delta\omega_x = 2\pi\Delta f_x$, за пределами которого величина нормированной амплитуды спектральной составляющей $X_x(\omega)/X_{max}$ при $(\omega > \Delta\omega_x)$ становится пренебрежимо малой величиной $X \rightarrow 0$. Для оценки ширины спектра сигнала существует несколько методов.

- *Метод эквивалентного прямоугольника* — согласно этого метода, ширину спектра оценивают как основание прямоугольника с высотой равной 1, площадь которого равна площади под фигурой $X(\omega)$ при $\omega > 0$

$$\Delta w_x = \int_0^{\infty} \frac{X_x(\omega)}{X_{max}} d\omega$$

и полученную величину называют *энергетической шириной спектра сигнала*.

- *Метод сечения* — в соответствии с которым ищется точка пересечения нормированного спектра и прямой параллельной оси частот на уровне 0.5.
- *Метод нуля* — при этом методе оценки ищется пересечение нормированным спектром нулевого уровня (оси частот) первый или второй раз.
- *Метод долевого мощности* — ширина спектра оценивается как интервал частот, в пределах которого сосредоточена заданная доля мощности сигнала (99%, 95%, 90%, 80%, 50%). Формула представляет собой интеграл от нормированного спектра, но зависит от способа получения спектра - например может потребоваться удвоение.

Из метода эквивалентного прямоугольника появилась формула *взаимосвязи ширины спектральной плотности мощности сигнала и интервала его корреляции*

$$\Delta w_x = 2\pi \Delta f_x = \frac{\pi}{2\tau_x}, \quad \text{отсюда} \quad \Delta f_x * \tau_x = \frac{1}{4} .$$

Автокорреляционная функция дискретного сигнала

Если рассматривать АКФ пачки прямоугольных видеоимпульсов, как некоторые сигнальные кодовые комбинации, можно обратить внимание, что график АКФ имеет специфический лепестковый вид. С практической точки зрения, использование АКФ для решения задачи обнаружения такого сигнала или измерения его параметров, совершенно несущественно, что отдельные лепестки имеют треугольную форму. Важен лишь их относительный уровень по сравнению с центральным максимумом, когда $\tau = 0$.

Поэтому основная задача — определение автокорреляционной функции так, чтобы из нее можно было извлекать полезную информацию, абстрагируясь от второстепенных подробностей. Основой для этого служит идея математической модели дискретного сигнала.

Необходимо обобщить исходную формулу таким образом, чтобы по ней можно было вычислять дискретный аналог АКФ применительно к многопозиционным сигналам. Понятно, что операцию интегрирования здесь следует заменить суммированием, а вместо переменной x использовать целое число n (положительное или отрицательное), указывающее, на сколько позиций сдвинута копия относительно исходного сигнала. Запишем дискретную АКФ в требуемом виде

$$\hat{R}_x(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j x_{j-n} .$$

Эта функция целочисленного аргумента n обладает известными свойствами обычной АКФ:

- четностью $\hat{R}_x(n) = \hat{R}_x(-n)$,

- при нулевом сдвиге определяет энергию дискретного сигнала

$$\hat{R}_x(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j^2 = E_x .$$

ВКФ дискретного сигнала $\hat{R}_{xy}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j y_{j-n} .$

В свойствах теряет четность, но по прежнему определяет взаимную энергию спектра, но уже для двух сигналов одновременно или суммарно.

По аналогии сохраняется и то, что взаимокорреляционная функция и взаимный энергетический спектр двух сигналов связаны парой преобразований Фурье.

Выводы

- В отличие от аналоговых сигналов дискретные сигналы описываются последовательностями отсчетных значений в дискретном множестве точек.
- Спектр дискретного сигнала состоит из бесконечного числа копий спектра исходного аналогового сигнала.
- Восстановление исходного сигнала из дискретной последовательности отсчетов реальным частотным фильтром неизбежно связано с искажениями.
- Число амплитудных коэффициентов гармоник в спектре сигнала, находимых с помощью дискретного преобразования Фурье, составляет половину числа отсчетов.
- Использование z-преобразования позволяет изучать дискретные последовательности методами математического анализа непрерывных функций.
- Распределение взаимной энергии двух сигналов по частотам описывается их взаимным энергетическим спектром.
- Путем фильтрации соответствующих спектральных составляющих можно добиться приближенной ортогонализации сигналов.
- Распределение энергии сигнала по частотам устанавливает его энергетический спектр, равный квадрату модуля спектральной плотности.
- Степень сходства сигнала и его копии, смещенной во времени, описывается автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала.
- Энергетический спектр сигнала и его автокорреляционная функция взаимно связаны парой преобразований Фурье.
- Понятие автокорреляционной функции обобщается на случай многопозиционных дискретных сигналов.
- Сигнал обладает хорошими корреляционными свойствами, если уровень боковых лепестков АКФ значительно меньше уровня центрального лепестка.
- Преобразованием Фурье от взаимного энергетического спектра двух сигналов является их взаимокорреляционная функция.