

Лекция

по учебной дисциплине «Теория, системы и устройства передачи данных»
ст. преп. каф. СС и ПД Владимирова Сергей Александрович

Тема: **Сигналы систем и устройств передачи данных. Модуляция и манипуляция, их разновидности, методы получения, модельное представление.**

Лекция: **Детерминированные сигналы. Общая теория сигналов.**

Учебные вопросы:

1. Представление сигнала временными функциями.
2. Импульсная характеристика. Интеграл Дюамеля. Переходная характеристика.
3. Представление сигнала частотными функциями. Преобразование Лапласа. Обобщенные ряды Фурье. Вейвлет-анализ.

Литература:

1. Емельянов Г. А., Шварцман В. О. Передача дискретной информации: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1982. — 240 с.
2. Олифер В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы : учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер. – СПб. : Питер, 2012. – 943 с.

Детерминированные сигналы. Общая теория сигналов.

Для достоверной передачи данных (информации) пользуются детерминированными или регулярными сигналами. Изменение параметров таких сигналов во времени можно заранее предсказать, а значит предопределить действия по их обнаружению в каналах передачи данных. Таким образом детерминированный сигнал является достоверным событием. Рассмотрим представления и модели этих сигналов.

Представление сигнала временными функциями.

Любой непрерывный сигнал можно представить некоторой суммой элементарных сигналов с известными свойствами. А именно, на рисунке 1 сигнал $x(t)$ задается примыкающими друг к другу прямоугольными импульсами длительностью Δt .

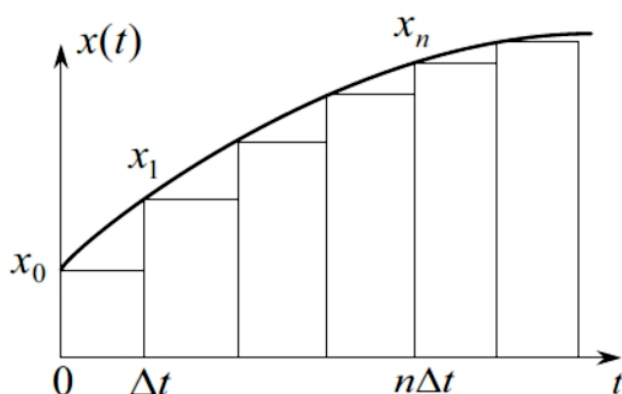


Рис.1. Представление сигнала прямоугольными импульсами.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(\Delta t)$$

На рисунке 2 этот же сигнал $x(t)$ представлен в виде суммы ступенчатых функций опять же следующих через временной интервал Δt .

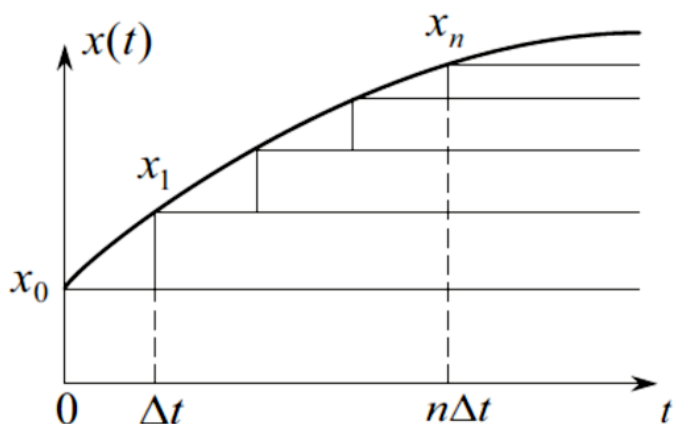


Рис. 2. Представление сигнала ступенчатыми функциями.

$$x(t) = x_0 \sigma(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) \sigma(t - n \Delta t)$$

Если $\Delta t \rightarrow 0$, заменить сумму интегрированием по переменной τ , производная $d\tau$ которой заменяет предел $\Delta t \rightarrow 0$, итоговые формулы преобразуются в следующий вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \quad x(t) = x_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau.$$

Полученные выше формулы являются двумя способами динамического представления сигналов, который позволяет по отсчетам мгновенных значений сигнала предполагать его поведение в будущем и определять причины в прошлом. Это динамические модели сигнала, основанные на $\sigma(t)$ - функции единичного скачка Хевисайда (функция включения, Оливер Хевисайд (1850-1925) - английский физик) и $\delta(\tau)$ - дельта-функции Дирака (математическая модель короткого внешнего воздействия с единичным импульсом (площадью или энергией)), которые взаимосвязаны друг с другом соотношениями

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0; \end{cases} \text{ , или при смещении на время } t_0 \text{ будет}$$

$$\sigma(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1/2, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0; \end{cases} \quad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$$

Дельта-функция — математически интересный объект, она равна нулю всюду, за исключением точки $t=0$ (принято говорить, что она сосредоточена в этой точке), дельта-функция тем не менее обладает единичным интегралом

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Важным свойством дельта-функции является ее физическая размерность - она такая же, как и размерность частоты, т.е. сек⁻¹.

Поэтому, если непрерывную функцию умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен δ -импульс. В этом заключено временное фильтрующее свойство дельта-функции.

Структурная схема системы представленной на рисунке 3, производящей измерение мгновенных значений аналогового сигнала $s(t)$, состоит из двух звеньев: перемножителя и интегратора. При этом, измерение величины $s(t_0)$ будет тем точнее, чем короче реальный сигнал (например, прямоугольный видеоимпульс), который приближенно представляет дельта-функцию $\delta(t-t_0)$.

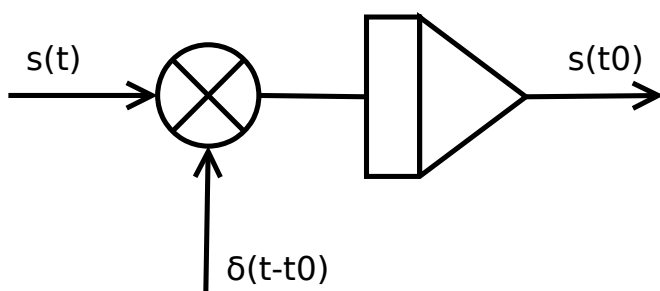


Рис. 3. Структурная схема измерений мгновенных значений аналогового сигнала $s(t)$.

$\sigma(t)$ - функция единичного скачка Хевисайда описывает процесс перехода некоторого физического параметра или объекта из «нулевого» в «единичное» состояние. Переход совершается по линейному закону за некоторое время 2ξ . Если параметр $\xi \rightarrow 0$, устремить к нулю, то в пределе переход из одного состояния в другое будет совершаться мгновенно. Математическая модель этого предельного сигнала получила название функции включения или функции единичного скачка (функции Хевисайда). В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчета времени на величину t_0 , что отражено во второй формуле представления.

В практических задачах обычно допустим и менее строгий подход, когда значение функции Хевисайда в точке $t=0$ не принимается во внимание совсем.

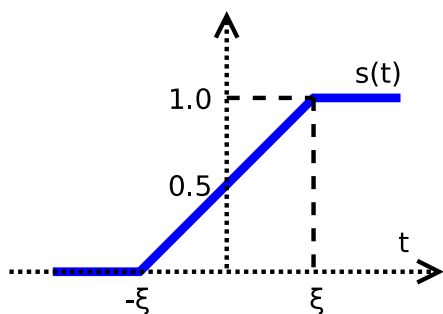


Рис. 4. Функция единичного скачка Хевисайда

Обобщенные функции как математические модели сигналов.

Классическая математика предполагает, что функция $s(t)$ должна принимать какие-то значения в каждой точке временной оси t . При этом

рассмотренная функция $\delta(t)$ не вписывается в эти рамки — ее значение при $t=0$ не определено вообще, хотя эта функция и имеет единичный интеграл. Очевидна необходимость расширить само понятие функции как математической модели сигнала. Поэтому современная математика преодолела эту трудность, введя принципиально новое понятие обобщенной функции.

В основе идеи обобщенной функции лежит простое интуитивное соображение. Держа в руках и рассматривая какой-нибудь предмет, мы его поворачиваем, стремясь получить множество проекций этого объекта на всевозможные плоскости. Аналогом «проекции» исследуемой функции $f(t)$ может служить, например, значение интеграла

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt, \quad (1)$$

при известной функции $\varphi(t)$, которую называют *пробной функцией*.

Каждой такой функции $\varphi(t)$ соответствует, в свою очередь, некоторое конкретное числовое значение (f, φ) . Поэтому утверждаем, что формула (1) задает некоторый функционал на множестве пробных функций $\varphi(t)$. Очевидно, что данный функционал линеен, т.е. $(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2)$.

Если этот функционал непрерывен и дифференцируется, то говорят, что на множестве пробных функций $\varphi(t)$ задана обобщенная функция $f(t)$. Обратите внимание, что интеграл в правой части выражения (1) нужно понимать формально-аксиоматически, а не как предел соответствующих ему интегральных сумм. Именно с таких позиций следует рассматривать приведенные ранее формулы динамического представления сигналов $x(t) = (\delta(t - \tau), x(\tau))$.

Обобщенные функции, даже не заданные явными выражениями, обладают многими свойствами традиционных классических функций. Лучше, если обобщенные функции дифференцируются. При этом, следует обязательно принимать во внимание, что пробные функции $\varphi(t)$ являются финитными (конечными), т.е. они обращаются в нуль вне конечного отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$.

В качестве примера приведем производную функции Хевисайда $\sigma(t)$, рассматривая последнюю как обобщенную функцию.

Поэтому $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$, причем это равенство необходимо понимать

именно в смысле теории обобщенных функций, поскольку в классическом смысле производная $\sigma'(t)$ при $t=0$ просто не существует. Таким же образом можно определить и производную дельта-функции $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$.

Хотя явная формула для $\delta'(t)$ отсутствует, такой математический объект существует и действует по правилу — каждой классической функции $\varphi(t)$ он сопоставляет числовое значение ее производной в нуле с точностью до знака.

В настоящее время теория обобщенных функций получила широкое развитие и многочисленные применения. На ее основе созданы математические методы моделирования сигналов, устройств и изучения процессов.

Продолжая способ динамического представления сигналов, в основе которого лежит принцип суперпозиции, и который позволяет представлять сигналы в виде сумм элементарных импульсов, когда тем или иным способом определяется реакция на выходе четырехполюсника, возникающая под

воздействием элементарного импульса на входе, то окончательным этапом решения задачи явится суммирование набора таких реакций.

Импульсная характеристика.

Предположим некоторая линейная стационарная система описывается оператором T . Полагаем, что входной и выходной сигналы одномерные. *Импульсной характеристикой* системы по определению, называется функция $h(t)$, являющаяся откликом системы на входной сигнал $\delta(t)$ в соответствии с уравнением $h(t) = T \delta(t)$.

Поскольку система стационарна, аналогичное уравнение будет и в случае, если входное воздействие смещено во времени на произвольную величину t_0 :

$$h(t - t_0) = T \delta(t - t_0) .$$

Таким образом импульсная характеристика $h(t)$, так же как и порождающая ее дельта-функция $\delta(t)$ является результатом разумной идеализации. С физической точки зрения импульсная характеристика приближенно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал произвольной формы с единичной площадью при условии, что длительность этого сигнала пренебрежимо мала по сравнению с характерным временным масштабом системы, например периодом ее собственных колебаний.

С математической точки зрения *импульсная характеристика является функцией Грина* рассматриваемого оператора T .

Интеграл Дюамеля.

При известной импульсной характеристике $h(t)$ линейной стационарной системы, можно аналитически решить любую задачу о прохождении детерминированного сигнала через эту систему. Выше в лекции было показано, что входной сигнал $x(t)$, выраженный в виде входного напряжения всегда допускает представление вида

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau .$$

Соответствующая ему выходная реакция системы

$$u_{\text{вых}}(t) = T * u_{\text{вх}}(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau .$$

Исходя из того, что интеграл есть предельное значение суммы, поэтому линейный оператор T на основании принципа суперпозиции вносится под знак интеграла $u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) T \delta(t - \tau) d\tau$.

Затем, так как оператор T «действует» лишь на величины, зависящие от текущего времени t , а не от переменной интегрирования τ , запишем окончательно, что $u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau$.

Получилась формула, имеющая фундаментальное значение в теории линейных систем, которая называется *интегралом Дюамеля*. Это соотношение отображает то, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой свертку двух функций — входного сигнала и импульсной характеристики системы. Эту формулу можно записать и в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t - \tau) h(\tau) d\tau .$$

Поэтому, если импульсная характеристика $h(t)$ известна, то дальнейшее решение определено и сводится к полностью формализованным операциям по нахождению свертки функций. Мгновенное значение выходного сигнала является функционалом от входного сигнала, а импульсная характеристика рассматривается, как обобщенная функция.

Для многомерного случая системы с m -входами и n -выходами вводятся парциальные импульсные характеристики $h_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, каждая из которых отображает сигнал на i -м выходе при подаче на j -й вход дельта-функции $\delta(t)$. Совокупность функций $h_{ij}(t)$ образует матрицу импульсных характеристик

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nm} \end{pmatrix} .$$

В многомерном случае интеграл Дюамеля приобретает вид

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau ,$$

где $U_{\text{вых}}$ — n -мерный вектор; $U_{\text{вх}}$ — m -мерный вектор.

Условие физической реализуемости - при любом виде импульсной характеристики физически осуществимой системы, всегда должен выполняться основной принцип: выходной сигнал, отвечающий импульсному входному воздействию, не может возникнуть до момента появления импульса на входе.

Отсюда и ограничение на вид допустимых импульсных характеристик:

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Для физически реализуемой системы верхний предел в формуле интеграла Дюамеля может быть заменен на текущее значение времени:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau .$$

Эта формула имеет следующий физический смысл: линейная стационарная система при обработке поступающего на вход сигнала, проводит операцию взвешенного суммирования всех его мгновенных значений, существовавших «в прошлом» при $-\infty < \tau < t$. Роль весовой функции выполняет при этом импульсная характеристика системы. Принципиально важно, что физически реализуемая система ни при каких обстоятельствах не способна оперировать «будущими» значениями **входного** сигнала. Физически реализуемая система должна быть устойчивой. Это значит, что ее импульсная характеристика должна быть абсолютно интегрируемой $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$.

Переходная характеристика.

Для случая, когда на входе линейной стационарной системы действует сигнал, изображаемый функцией Хевисайда $\sigma(t)$ выходную реакцию называют переходной характеристикой системы $g(t) = T \sigma(t)$.

Поскольку система стационарна, переходная характеристика инвариантна относительно временного сдвига $g(t - t_0) = T \sigma(t - t_0)$.

Свойства физической реализуемости системы полностью переносятся на случай, когда система возбуждается не дельта-функцией, а единичным скачком. Поэтому переходная характеристика физической реализуемой системы отлична от нуля когда $t \geq 0$ и $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Импульсная и переходная характеристики связаны соотношениями, как и $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$, поэтому $h(t) = T \left[\frac{d\sigma(t)}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [T \sigma(t)] = \frac{dg(t)}{dt}$.

Отсюда $g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) h(\xi) d\xi$.

Используя формулу динамического представления получаем еще одну форму интеграла Дюамеля $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{ex}}(0)g(t) + \int_0^t \frac{du_{\text{ex}}(\tau)}{d\tau} g(t - \tau) d\tau$.

Рассмотренный анализ основан на временном представлении свойств сигналов и систем. В технике чаще применяется, а порой и гораздо более удобен анализ в частотной области, когда сигналы задаются рядами или интегралами Фурье. Свойства систем тогда описываются их частотными характеристиками, которые указывают закон преобразования элементарных гармонических сигналов.

Представление сигнала частотными функциями.

С точки зрения математического исследования систем особый интерес представляют такие входные сигналы, которые даже при преобразовании системой, продолжают оставаться неизменными по форме. Продолжая рассматривать случай линейной стационарной системы запишем равенство

$$u_{\text{вых}}(t) = T u_{\text{ex}}(t) = \lambda u_{\text{ex}}(t),$$

для которого $u_{\text{ex}}(t)$ является собственной функцией системного оператора T , а величина или число λ , в общем случае комплексное, — его собственным значением.

Далее рассмотрим комплексный сигнал $u_{\text{ex}}(t) = e^{j\omega t}$, который при любом значении частоты ω и есть собственная функция линейного стационарного оператора.

Комплексное представление гармонического колебания

$$\text{Выражения вида } u_s(t) = U \sin(\omega t + \varphi),$$

$u_c(t) = U \cos(\omega t + \varphi) = U \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ определяют гармонические колебания с амплитудой U , циклической частотой $\omega = 2\pi f$ или периодом $T = 1/f$ с начальной фазой φ . Колебания $u_s(t)$ и $u_c(t)$ сдвинуты относительно друг друга по фазе или углу на величину $\pi/2$ (90°). Для исследований, когда это удобно, вместо двух действительных функций \sin - \cos рассматривают одну комплексную функцию

$$\dot{u}(t) = u_c(t) + j u_s(t) = U [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = U e^{j(\omega t + \varphi)},$$

которую называют комплексным гармоническим колебанием. Иногда в символическом виде ее представляют как

$$\dot{u}(t) = \dot{U} e^{j\omega t}, \quad \dot{U} = U e^{j\varphi},$$

где \dot{U} — комплексная амплитуда, определяемая амплитудой и фазой колебания. При известной комплексной амплитуде \dot{U} амплитуда и фаза колебания определяются соотношениями

$$U = |\dot{U}|, \quad \varphi = \text{Arg } \dot{U}.$$

Действительные гармонические колебания $u_s(t)$ и $u_c(t)$ в комплексном представлении являются, соответственно, действительной и мнимой частями комплексного колебания $\dot{u}(t)$ — $u_c(t) = \Re \dot{u}(t)$, $u_s(t) = \Im \dot{u}(t)$.

Комплексное гармоническое колебание $\dot{u}(t)$ геометрически изображают вектором постоянной длины U , вращающимся с угловой скоростью ω (рад/с) против часовой стрелки, смотри рисунок 5.

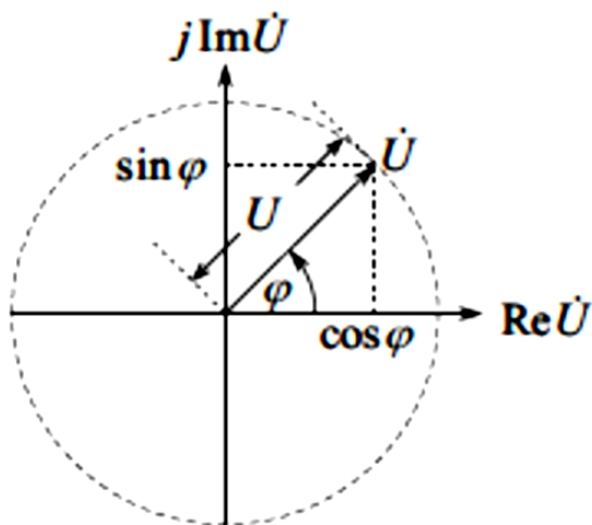


Рис. 5. Колебание в виде вектора на комплексной плоскости.

Для математических и модельных вычислений вводится понятие отрицательной частоты. Реальный гармонический сигнал при использовании формулы Эйлера представляется как сумма двух комплексно-сопряженных векторов, вращающихся в разные стороны с угловыми скоростями $+\omega$ и $-\omega$, как показано на рисунке 6.

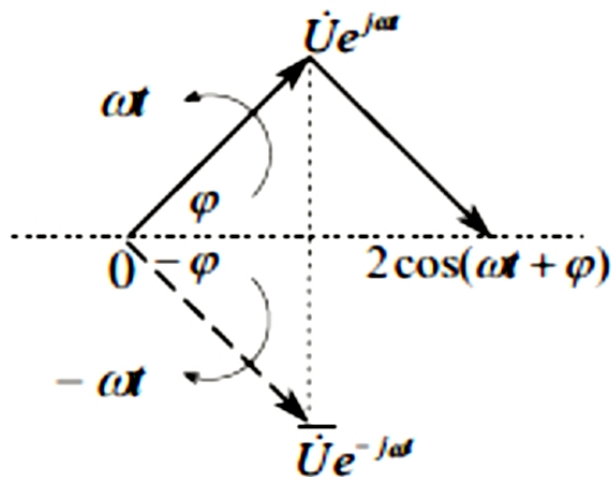


Рис. 6. Комплексно-сопряженные векторы гармонического сигнала.

$$u_c(t) = \Re[\dot{U} e^{j\omega t}] = U \cos \omega t \Big|_{\varphi=0} = U \frac{(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2} .$$

Проекции этих комплексно-сопряженных векторов на действительную ось складываются и образуют удвоенное действительное косинусоидальное колебание. Таким образом, действительное колебание представляется прямым спектром в области положительных частот $\omega > 0$ и инверсным спектром отрицательных частот $\omega < 0$.

Преобразование Гильберта

В общей теории сигналов для некоторого произвольного, не обязательно гармонического, сигнала вводится понятие *аналитического сигнала*. Обычный вещественный сигнал $x(t)$ преобразуется в вещественную функцию $u(t)$ и дополняется мнимой компонентой $v(t)$ так, что образуется комплексный сигнал $s(t) = u(t) + jv(t)$. Мнимая компонента $v(t)$ полностью зависит от $u(t)$ и связана с ней преобразованием Гильберта

$$v(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t')}{t-t'} dt' .$$

Это значит, что в спектре сигнала для каждой косинусоидальной составляющей спектра $u(\omega)$ функции $u(t)$ имеется такая же по амплитуде синусоидальная составляющая $v(\omega)$ мнимой функции $v(t)$. Поэтому спектр $s(\omega)$ комплексного сигнала $s(t)$ отличен от нуля только при положительных значениях частоты ω и отличается от спектра $u(\omega)$ масштабным множителем

$$\dot{s}(\omega) = \begin{cases} 2u(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Таким образом, преобразование Гильберта приводит к комплексному сигналу, спектр которого имеет ту же функциональную структуру, что и спектр исходного вещественного колебания $x(t)$.

Это потребовалось для того, чтобы можно было разложить вещественный сигнал на огибающую $A(t)$ и колебательный множитель $\cos(\omega t + \varphi(t))$ и избежать неоднозначности в их определении при амплитудной и фазовой модуляции. То есть $s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$, $A(t)$ - модуль или огибающая, $\varphi(t)$ - аргумент или фаза.

Спектральная плотность сигнала

Для реальных сигналов с конечной энергией $E_x < \infty$ выполняется пара интегральных преобразований Фурье (ПФ)

$$\text{прямое (ПФ)} \quad \dot{X}(\omega) = X(j\omega) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \text{и}$$

$$\text{обратное (ОПФ)} \quad x(t) = F^{-1}(\dot{X}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Обратное преобразование представляет сигнал $x(t)$ в виде бесконечной суммы множества гармонических составляющих

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f) df [\cos \omega t + j \sin \omega t] = \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{U} [\cos \omega t + j \sin \omega t]$$

с комплексными амплитудами $d\dot{U} = X(j2\pi f)df$. Поэтому при прямом преобразовании вводится функция, которая называется спектральной плотностью комплексных амплитуд:

$X(j2\pi f) = X(j\omega) = \frac{d\dot{U}}{df}$, при этом $X^*(\omega) = X(-j\omega)$ — комплексно-сопряженная спектральная плотность комплексных амплитуд.

Для действительного сигнала $x(t)$ функция $X(j\omega)$ всегда комплексная в представлении действительной и мнимой частями:

$$\dot{X}(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) = X(\omega)e^{j\varphi_x(\omega)}, \quad \text{где}$$

$$X_R(\omega) = \Re \dot{X}(\omega) \quad - \text{действительная,} \quad X_I(\omega) = \Im \dot{X}(\omega) \quad - \text{мнимая части и}$$

$$X(\omega) = \sqrt{X_R^2(\omega) + jX_I^2(\omega)} = |\dot{X}(\omega)| \quad - \text{амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала, а}$$

$$\varphi_\omega = \operatorname{arctg} \left(\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \right) \quad - \text{его фазочастотная характеристика (ФЧХ).}$$

Для реальных действительных сигналов $X_R(\omega)$ и $X(\omega)$ — четные функции, а $X_I(\omega)$ и $\varphi_x(\omega)$ — нечетные функции частоты.

Продолжим рассмотрение для случая линейной стационарной системы и запишем и вычислим интеграл Дюамеля

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} .$$

Отсюда нашли, что собственным значением системного оператора T будет комплексная величина

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

которая называется *частотным коэффициентом передачи* системы. Эта формула устанавливает принципиально важный факт — *частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье*. Поэтому, зная функцию $K(j\omega)$ и используя ОПФ, можно определить импульсную характеристику

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Из полученных соотношений можно сделать важное заключение в теории линейных стационарных систем — любую систему можно рассматривать либо во временной области с помощью ее импульсной или переходной характеристики, либо в частотной области, задавая частотный коэффициент передачи. Оба подхода равноценны и выбор одного из них делается исходя из исходных данных о системе и простоты вычислений.

Для многомерного случая отметим, что частотные свойства линейной системы, имеющей m -входов и n -выходов, можно описать матрицей частотных коэффициентов передачи

$$K(j\omega) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nm} \end{pmatrix} .$$

Между матрицами $h(t)$ и $K(j\omega)$ существует закон связи, аналогичный приведенному выше.

Преобразование Лапласа

В представлении и анализе сигналов наряду с преобразованием Фурье широко используется еще один вид интегральных преобразований, который используется для решения.

Понятие комплексной частоты.

Спектральный метод основан на том, что исследуемый сигнал представляется в виде суммы неограниченно большого числа элементарных слагаемых, каждое из которых периодически изменяется во времени по закону $e^{j\omega t}$.

Этот принцип обобщили и вместо комплексных экспоненциальных сигналов с чисто мнимыми показателями $e^{j\omega t}$ ввели в рассмотрение другие экспоненциальные сигналы вида e^{pt} , где p — комплексное число $p = \sigma + j\omega$, получившее название комплексной частоты.

Из двух таких комплексных сигналов прямым и комплексно-сопряженным, по аналогии с гармоническим частотным представлением, можно составить вещественный сигнал, используя следующее правило:

$$x(t) = \frac{(e^{pt} + e^{p^*t})}{2}, \text{ где } p^* = \sigma - j\omega \text{ — комплексно-сопряженная величина.}$$

Раскладывая выражение в частотном представлении, получаем

$$x(t) = e^{\sigma t} \frac{(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t .$$

Далее исходя из выбора вещественной и мнимой частей комплексной частоты можно получить разнообразные вещественные сигналы. Например, если $\sigma = 0$, а $\omega \neq 0$, получаются обычные гармонические колебания вида $\cos(\omega t)$. Если $\omega = 0$, то в зависимости от знака σ получаются либо нарастающие, либо убывающие во времени экспоненциальные колебания. Более сложную форму сигналы приобретают, когда $\omega \neq 0$. Тогда множитель $e^{\sigma t}$ описывает огибающую гармонического сигнала, который экспоненциально изменяется во времени. Эти перечисленные типовые сигналы изображены на рисунке 7.

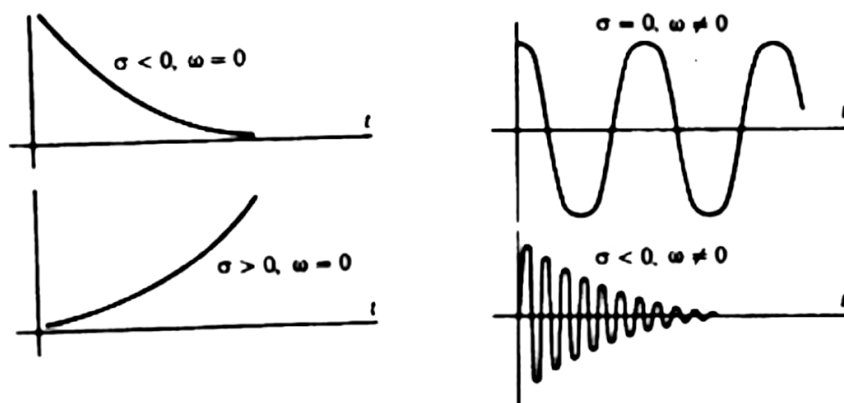


Рис. 7. Примеры реальных вещественных сигналов в соответствии с разными значениями комплексной частоты.

Введенное понятие комплексной частоты оказывается очень полезным из-за того, что это дает возможность, не прибегая к обобщенным функциям, получать спектральные представления сигналов, математические модели которых неинтегрируемы. Очень существенно и другое соображение: экспоненциальные сигналы в таком представлении служат «естественным» средством исследования колебаний в разнообразных линейных системах.

Обратите внимание на то, что истинная физическая частота ω в этом представлении служит мнимой частью комплексной частоты. Для вещественной части σ комплексной частоты специального термина не существует.

Основные соотношения.

Для некоторого сигнала $x(t)$, вещественного или комплексного, определенного для $t > 0$ и приравненного нулю при отрицательных значениях времени, преобразование Лапласа этого сигнала есть функция комплексной переменной p , задаваемая интегралом:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt .$$

Сигнал $x(t)$ называется *оригиналом*, а функция $X(p)$ — его *изображением по Лапласу* (можно просто *изображением*).

Условие, которое обеспечивает существование интеграла, заключается в следующем: сигнал $x(t)$ должен иметь не более чем экспоненциальную степень роста при $t > 0$, т.е. должен удовлетворять неравенству $|x(t)| \leq A e^{at}$, где A, a — положительные числа.

При выполнении этого неравенства функция $X(p)$ существует в том смысле, что такой интеграл абсолютно сходится для всех комплексных чисел p , у которых $Re p > a$. А число a называют абсциссой абсолютной сходимости.

Переменная p в интеграле тождественна комплексной частоте $p = \sigma + j\omega$. При чисто мнимой комплексной частоте, когда $\sigma = 0$, интеграл переходит в интеграл, определяющий Фурье-преобразование сигнала, который равен нулю при $t < 0$.

Таким образом, преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье для случая комплексных частот.

Подобно тому как это делается в теории преобразования Фурье, можно, зная изображение, восстановить оригинал. Для этого в формуле обратного преобразования Фурье

$$x(t) = F^{-1}(\dot{X}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

необходимо выполнить аналитическое продолжение, перейдя от мнимой переменной $j\omega$ к комплексному аргументу $p = \sigma + j\omega$. На плоскости комплексной частоты интегрирование проводят вдоль неограниченно протяженной вертикальной оси, расположенной правее абсциссы абсолютной сходимости.

Поскольку при $\sigma = const$ дифференциал $d\omega = (\frac{1}{j}) dp$, формула обратного преобразования Лапласа приобретает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp .$$

В теории функций комплексного переменного доказано, что изображения по Лапласу обладают «хорошими» свойствами с точки зрения гладкости: такие изображения во всех точках комплексной плоскости p , за исключением счетного множества так называемых особых точек, являются аналитическими функциями. Особые точки, а это как правило, — полюсы, однократные или многократные. Поэтому для вычисления этих интегралов (последняя ф-ла) можно использовать гибкие методы теории вычетов.

На практике широко применяются таблицы преобразований Лапласа, в которых собраны сведения о соответствии между оригиналами и изображениями. Наличие таблиц сделало метод преобразования Лапласа

популярным как в теоретических исследованиях, так и в инженерных расчетах устройств и систем.

Представление сигналов ортогональными рядами

Продолжаем рассматривать реальные сигналы $x(t)$ с ограниченной энергией $E_x < \infty$.

Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье.

Два сигнала u и v называются ортогональными, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt = 0$$

Пусть H — гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии. Эти сигналы определены на отрезке времени $[t_1, t_2]$, конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же отрезке задана бесконечная система функций $\{\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t), \dots\}$, ортогональных друг другу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t) \psi_n(t) dt = \begin{cases} E_{\psi_n}, & k=n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad E_{\psi_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dt, \quad ,$$

где E_{ψ_n} — энергии базисных функций.

(При заданном в пространстве сигналов ортонормированном базисе $E_{\psi_n} = 1$.)

В этом случае произвольный сигнал $x(t)$ можно представить обобщенным рядом Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(t), \quad ,$$

где c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ — коэффициенты ряда, а $\psi_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — базисные функции.

Коэффициенты c_n данного ряда находят следующим образом. Можно использовать два подхода к решению задачи.

Первый подход связан с использованием условия ортогональности. Возьмем базисную функцию $\psi_k(t)$ с произвольным номером k , умножим на нее обе части равенства и затем проинтегрируем результаты по времени:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_k(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(t) \psi_k(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) \psi_k(t) dt = c_k E_{\psi_k} .$$

Отсюда искомые параметры ряда определяются как

$$c_k = \frac{1}{E_{\psi_k}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Второй подход связан с рассмотрением конечного ряда Фурье

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(t) \simeq x(t), \quad ,$$

приблизительно описывающего сигнал $x(t)$, и определении таких параметров ряда c_n , $n=0, 1, 2, \dots$, которые обеспечивают минимум заданного критерия качества представления сигнала $x(t)$ таким рядом.

В качестве критерия зададим меру отклонения $x^*(t)$ от $x(t)$ как среднеквадратичную погрешность (СКП) и введем ее, как функционал от искомым параметров $c_n, n=0, 1, 2, \dots, N$

$$\bar{\epsilon}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t) - \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(t) \right)^2 dt = \varphi(c_0, c_1, \dots, c_N) .$$

Далее оптимальные параметры $c_{k,onm}, k=0...N$ ищутся из решения вариационной задачи, которая сводится к решению системы уравнений

$$\frac{d}{dc_k} \bar{\epsilon}^2 = \frac{d}{dc_k} \varphi(c_0, c_1, \dots, c_N) = 0 \Big|_{c_k=c_{k,onm}}, \quad k=0...N.$$

дифференцируем и приравниваем производные к нулю, получаем

$$\frac{d}{dc_k} \bar{\epsilon}^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t) - \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(t) \right) (-\psi_k(t)) dt = 0 \Big|_{c_k=c_{k,onm}} .$$

Отсюда получаем условие для расчета оптимальных параметров:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_k(t) dt + \sum_{n=0}^N c_{n,onm} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) \psi_k(t) dt = 0 .$$

С учетом свойства ортогональности базисных функций, основываясь на соотношении для параметров $c_{k,onm}, k=0...N$ конечного ряда Фурье и подставляя $c_{k,onm}$ вместо c_n , находим минимальную СКП приближения сигнала $x(t)$ конечным обобщенным рядом Фурье:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t) - \sum_{n=0}^N c_{n,onm} \psi_n(t) \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt - 2 \sum_{n=0}^N c_{n,onm} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_n(t) dt + \\ &+ \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N c_{n,onm} c_{k,onm} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) \psi_k(t) dt = E_x - 2 \sum_{n=0}^N c_{n,onm}^2 E_{\psi_n} + \sum_{n=0}^N c_{n,onm}^2 E_{\psi_n} , \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$\bar{\epsilon}^2 = E_x - \sum_{n=0}^N c_{n,onm}^2 E_{\psi_n} = E_x - E_{x^*}$$

Минимальная СКП равна разности энергии E_x исходного сигнала $x(t)$ и энергии E_{x^*} приближенного сигнала $x^*(t)$. При этом, если $N \rightarrow \infty$, то $E_{x^*} \rightarrow E_x$, а $\epsilon_{min}^2 \rightarrow 0$. Отсюда, в соответствии с равенством Парсеваля

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \sum_{n=0}^N c_{n,onm}^2 E_{\psi_n} ,$$

которое показывает эквивалентность энергий двух сигналов — аналогового сигнала и его же другой форме в дискретно-аналоговом виде.

Относительная минимальная СКП (ОСКП) будет равна

$$\delta_{min} = \frac{\epsilon_{min}^2}{E_x} = 1 - \sum_{n=0}^N c_{n,onm}^2 \frac{E_{\psi_n}}{E_x} .$$

В итоге имеем компактно расписанный метод наименьших квадратов (МНК).

В качестве рядов могут быть самые разные ряды, в том числе и на основе многочисленных полиномов (Чебышева, Якоби, Лежандра, Лаггера, Эрмита ...) . Их применение ограничивается соблюдением свойств полиномов для аппроксимируемых функций или сигналов.

Представление реального конечного сигнала тригонометрическим рядом Фурье.

Возьмем реальный, заданный на конечном интервале T_x , сигнал $x(t)$, $0 < t < T_x$ и представляем его в виде периодически продолженного сигнала (это можно делать с любым сигналом) $x(t) = x_{T_x}(t) = x(t + T_x)$. А любая периодическая функция с периодом T_x , удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье вида

$$x_{T_x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_x}.$$

По формулам Эйлера распишем и преобразуем ряд к следующему виду

$$\cos n \omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n \omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j},$$

$$x_{T_x}(t) = \frac{1}{2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - j b_n) e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + j b_n) e^{-jn\omega_0 t} \right].$$

Вводим комплексную амплитуду спектральной составляющей \dot{X}_n

$$\dot{X}_n = \begin{cases} \frac{(a_n - j b_n)}{2}, & n > 0, \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0, \\ \frac{(a_n + j b_n)}{2}, & n < 0, \end{cases} \text{ , переходим к экспоненциальному ряду}$$

$$x_{T_x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \dot{X}_n = S_x(jn\omega_0) = S_x(j\omega_n), \quad \text{для которого } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_x} \text{ —}$$

частота следования периодически продолженного сигнала (частота периодического продолжения исследуемого сигнала (фрагмента)), $\omega_n = n\omega_0$ — частота, кратная частоте следования периодически продолженного сигнала (частота дискретизации).

То есть аналоговый, ограниченный по времени сигнал, в спектральной области будет характеризоваться дискретно-аналоговым представлением комплексных амплитуд, составляющих спектр сигнала \dot{X}_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для нахождения \dot{X}_n умножаем левую и правую части формулы экспоненциального ряда на комплексно-сопряженную экспоненту базисной функции $\psi_k^*(t) = e^{-jk\omega_0 t}$ и интегрируем по сигнальному интервалу $0 < t < T_x$.

Получаем следующее

$$\int_0^{T_x} x_{T_x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_0^{T_x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n \int_0^{T_x} e^{jm\omega_0 t} dt, \quad \text{где } m = n - k.$$

Интеграл в правой части будет равен

$$\int_0^{T_x} e^{jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_x, & m=0, \\ \frac{e^{jm\omega_0 T_x} - 1}{jm\omega_0}, & m \neq 0, \end{cases} \quad e^{j2\pi m} = 1, \text{ для любого } m (\cos(2\pi m)).$$

Запишем итоговую систему базисных функций $\psi_n(t) = e^{\pm jk\omega_0 t}$

$$\int_0^{T_x} \psi_n(t) \psi_k^*(t) dt = \begin{cases} E_{\psi_x} = T_x, & k=n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad \text{и отсюда получается спектр}$$

$$\dot{X}_n = \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} x_{Tx}(t) e^{(jn\omega_0 t)} dt, \quad \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Примеры сигнальных спектров приведены на рисунке 8. Импульсные сигналы всегда имеют непрерывный спектр. Периодический сигнал показан с периодом $T_u = 4t_u$. Ниже приведен его линейчатый нормированный амплитудный спектр (штрихом показана огибающая спектра) в виде дискретной последовательности амплитуд на частотах $f_n = n/T_u$, $n=1, 2, \dots$

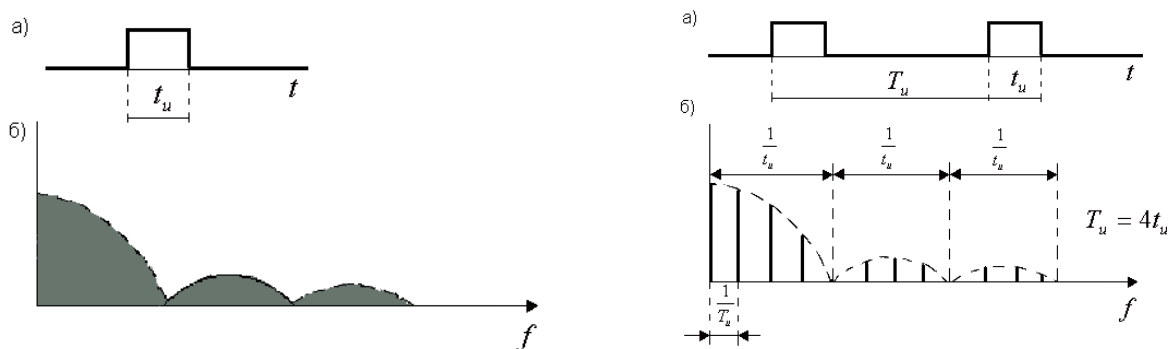


Рис. 8. Импульсный и периодический сигналы со своими амплитудными спектрами.

Вейвлет-анализ

Спектральные методы анализа, основанные на применении тригонометрических базисных систем, вполне соответствуют задачам исследования сигналов, близких по форме некоторым периодическим колебаниям. Например, при исследовании радиоимпульса, можно заранее утверждать, что частотная зависимость модуля его спектральной плотности будет иметь значительный локально выраженный максимум в окрестности частоты высокочастотного заполнения (несущей). Если сигнал не имеет четкого периодического характера, эффективность алгоритма преобразования Фурье падает в значительной мере; не удастся, в частности, сэкономить объем данных на концентрации энергии за счет перехода от математической модели сигнала во временной области к соответствующей модели в частотной области.

Для преодоления таких затруднений в последние годы был предложен новый подход, на базе которого возникло целое направление в теории и технике сигналов, получившее название вейвлет-анализа.

Понятие вейвлета.

Английское слово *wavelet* можно формально перевести на русский язык словосочетанием «небольшая волна» или «небольшое колебание». Смысл этого

термина — в наглядно-образной форме указать на те требования, которым обязана соответствовать некоторая функция $\psi(t)$ для того, чтобы принадлежать к этому классу:

- график такой функции должен осциллировать вокруг нуля в окрестности некоторой точки на оси t , причем $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$;
- норма функций должна быть конечной $\|\psi\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Выбор конкретного вейвлета целиком зависит от поставленной задачи и от вида анализируемого сигнала. Вейвлет-анализ — это мощное и достаточно гибкое средство для задания ортонормированных базисов в пространстве сигналов.

Дискретный вейвлет-анализ.

Это представление сигналов в виде обобщенного ряда Фурье по системе базисных функций, возникающих из конкретного исходного порождающего вейвлета $\psi(t)$ за счет проведения операций сдвига во времени и изменения временного масштаба.

Для исходного сигнала существующего на отрезке $[0, T_x]$ временной оси, удобно перейти к безразмерному времени $\Theta = t/T_x$ — при такой замене аргумент сигнала определен в пределах отрезка $[0, 1]$.

Для наглядности рассмотрим простой пример, когда порождающим элементом базиса служит вейвлет Хаара. Эта функция существует на отрезке $[0, 1]$ и принимает одно из двух возможных значений:

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 < \theta \leq 1. \end{cases}$$

Система функций соответствует правилу $\psi_{jk}(\theta) = A \psi(2^j \theta - k)$, где A — некоторая постоянная; j, k — положительные и отрицательные целые числа, включая нуль.

Все функции ψ_{jk} взаимно ортогональны, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\theta) \psi_{mn}(\theta) d\theta = 0$ если равенства $j=m$ и $k=n$ не выполняются одновременно.

Постоянное число A подбирается таким образом, чтобы базисная система вейвлетов стала ортонормированной. Для этого пользуются требованием равенства 1 интеграла энергии базисного сигнала, отсюда

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(2^j \theta - k) d\theta = A^2 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\xi) d\xi = A^2 2^{-j} = 1 \text{ , отсюда } A = 2^{\frac{j}{2}} \text{ .}$$

Получив ортонормированную базисную систему вейвлетов Хаара, можно осуществить представление произвольного сигнала $x(t)$ в виде обобщенного

ряда Фурье $x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} c_{jk} \psi(2^j \frac{t}{T_x} - k)$. Коэффициенты c_{jk}

вычисляются, как скалярные произведения исходного сигнала и соответствующей базисной функции $c_{jk} = \left(x(t), 2^{\frac{j}{2}} c_{jk} \psi\left(2^j \frac{t}{T_x} - k\right) \right)$.

Такое представление спектра отличается тем, что суммирование проводится не по одному, а по двум индексам. Это обстоятельство несущественно, так как и одноиндексная и двухиндексная системы в равной мере принадлежат одному и тому же классу бесконечных счетных, т.е. перечислимых множеств.

Вейвлет-спектр сигнала, принимающего вещественные значения, можно образно представить себе как некоторый «лес» из вертикальных отрезков, размещенных на jk -плоскости в точках с целочисленными координатами. При этом координата j указывает на скорость изменения сигнала, а координата k — на положение вдоль оси времени.

Вейвлет-преобразования.

Наряду с разрывными функциями, подобными рассмотренному выше вейвлету Хаара, можно использовать и непрерывные вейвлеты, построив на их основе полные аналоги преобразований Фурье или Лапласа.

Примером такой функции может служить хорошо изученный вейвлет "сомбреро" (мексиканская шляпа) $\psi(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Основные итоги

- Спектральное представление сигнала представляет собой его разложение на конечную или бесконечную сумму элементарных гармонических сигналов с различными частотами.
- Периодические сигналы представляются рядами Фурье, которые образуются суммированием, вообще говоря, бесконечного числа гармоник с частотами, кратными частоте периодически продолженного сигнала.
- Спектральное представление непериодических, в частности импульсных, сигналов осуществляется путем разложения их в интеграл Фурье.
- В частотной области непериодический сигнал характеризуется своей спектральной плотностью. Сигнал и его спектральная плотность взаимно связаны парой преобразований Фурье.
- Для существования спектральной плотности необходимо, чтобы сигнал был абсолютно интегрируем.
- Спектральная плотность неинтегрируемого сигнала содержит особенность типа дельта-функции.
- Переход к комплексной частоте в преобразовании Фурье приводит к новому виду линейных интегральных преобразований — преобразованию Лапласа. Сигналы, преобразуемые по Лапласу, должны обращаться в нуль при $t < 0$.
- Вейвлет-анализ дает возможность эффективно исследовать сигналы, не обладающие четко выраженной периодичностью.