

# «Теория принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД  
Владимиров Сергей Александрович

## *Лекция 12*

### **Методы анализа временных рядов. Марковские процессы и модели.**

#### СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Учебные вопросы:

1. Модели временных рядов.
2. Рекуррентный алгоритм оценки параметров временного ряда, оптимальный по критерию наименьших квадратов.
3. Методы прогноза временных рядов.
4. Марковские процессы и модели. Марковские модели непрерывных и дискретных процессов.

Заключение

## Литература:

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания.- М.: Наука, 1987.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. – М.:Наука,1973.
3. Терентьев В.М. и др. Управление качеством обслуживания в корпоративных сетях спутниковой связи. - Учебное пособие. – Орел: Академия ФСО России, 2006.
4. Анфилатов В.С. Системный анализ в управлении [Электронный ресурс] : учебное пособие / - Москва : Финансы и статистика, 2013.
5. Бородачёв С. М. Теория принятия решений [Электронный ресурс] : учебное пособие / Бородачёв С. М. - Екатеринбург : Уральский федеральный университет, 2014.
6. Демидова, Л. А. Принятие решений в условиях неопределенности [Электронный ресурс] / Л. А. Демидова, В. В. Кираковский, А. Н. Пылькин. - М. : Горячая линия–Телеком, 2012.

## Введение

Надежность оценок параметров потоков требований на ресурс используемого оборудования, получаемых на основе широко используемых в настоящее время параметрических методов стохастического оценивания, относительно невысока из-за наличия априорной неопределенности относительно их вероятностно-временных характеристик [1-3]. Повысить степень обоснованности прогноза трафика разноприоритетных пользователей в этих условиях возможно на основе обработки реальных наблюдений (статистических временных рядов) за параметрами потоков запросов или требований методами математической статистики [1].

К основным задачам моделирования временных рядов и прогнозирования их параметров относятся: выбор подходящей параметрической модели временного ряда - временной последовательности значений интенсивности потока запросов, оценка ее параметров, диагностика качества, а также получение выражений для прогноза параметров ряда (экстраполяции значений интенсивности нагрузки на упреждающий момент времени). Для обеспечения состоятельности, достаточности и эффективности результатов обработки имеющихся статистических данных необходимо выполнение ряда условий для модели, например, стационарности и эргодичности и обеспечение времени обработки (оценивания параметров потока), меньшего, чем интервал корреляции значений временного ряда.

## *Модели временных рядов.*

### *Модель линейной регрессии.*

Под этапом выбора модели понимается обоснование некоторого класса стохастической модели и идентификации ее параметров на основе знания автокорреляционных функций элементов временного ряда, а также метода диагностической проверки модели.

Наличие статистической зависимости значений одного случайного процесса в два различных момента времени  $x(t_k)$ ,  $x(t_{k-1})$  либо значений двух различных процессов в совпадающие моменты времени  $y(t_k)$ ,  $x(t_k)$  делает возможным введение моделей изменения их состояния на основе уравнения прямой линейной (приближенной для негауссовского случая) регрессии  $x(t_k) = f_{xx}(x(t_{k-1}))$ ;  $y(t_k) = f_{yx}(x(t_k))$  в следующем виде [1-3]:

$$\begin{aligned} x(t_k) &\simeq \alpha_{xx} x(t_{k-1}) + \beta_{xx}(t_k); \\ y(t_k) &\simeq \alpha_{yx} x(t_k) + \beta_{yx}(t_k), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha_{xx} = (n \sum_{k=1}^n x(k-1)x(k) - \sum_{k=1}^n x(k-1) \sum_{k=1}^n x(k)) / (n \sum_{k=1}^n x^2(k-1) - (\sum_{k=1}^n x(k-1))^2)$ ,

$\alpha_{yx} = (n \sum_{k=1}^n x(k)y(k) - \sum_{k=1}^n x(k) \sum_{k=1}^n y(k)) / (n \sum_{k=1}^n x^2(k) - (\sum_{k=1}^n x(k))^2)$  - коэффициенты

регрессии  $X(t_k)$  на  $X(t_{k-1})$ , либо  $Y$  на  $X$  в совпадающие моменты времени;

$n$  - общее число обрабатываемых элементов (размер) выборки;

$$\beta_{xx} = \frac{(\sum_{k=1}^n x^2(k-1) \sum_{k=1}^n x(k) - \sum_{k=1}^n x(k-1) \sum_{k=1}^n x(k-1)x(k)) / (n \sum_{k=1}^n x^2(k-1) - (\sum_{k=1}^n x(k-1))^2)}{}$$

$$\beta_{yx} = \frac{(\sum_{k=1}^n x^2(k) \sum_{k=1}^n y(k) - \sum_{k=1}^n x(k) \sum_{k=1}^n x(k)y(k)) / (n \sum_{k=1}^n x^2(k) - (\sum_{k=1}^n x(k))^2)}{}$$
 - коэффициенты

сдвига.

Знак приближенного равенства говорит об аппроксимации точной, но неизвестной априори зависимости поведения процессов, прямой линейной регрессии. Коэффициенты уравнения регрессии в выражении (1) определены на основе метода наименьших квадратов, то есть оптимальны в смысле минимума среднего квадратичного отклонения истинного значения прямой регрессии от значения, полученного на основе модели. Первое уравнение в выражении (1) является уравнением авторегрессии, а второе – взаимной регрессии  $y$  на  $x$ .

Недостатком представленной модели является то, что вычисления коэффициентов уравнения  $\alpha$  и  $\beta$  проводятся по одноразовым измерениям пар значений  $(x,y)$  в пределах каждой выборки, что делает их оценку недостаточно состоятельной. При возможности проведения серии набора статистических данных о парах  $(x,y)$  большого размера  $n$ , в которой их значения повторяются  $n_{xy}$  раз, целесообразно ввести понятие выборочного коэффициента взаимной корреляции

$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^n n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}$ , который связан с коэффициентом регрессии соотношением

$a_{yx} = r_{yx} \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}$ , а также использовать известные тождества

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}; \quad \sum_{i=1}^n y_i = n\bar{y}; \quad \sum_{i=1}^n x^2 = nM(x^2); \quad \sum_{i=1}^n xy = \sum_{i=1}^n n_{xy}xy,$$

где  $n_{xy}$ - число случаев, в которых наблюдалась пара чисел  $x$  и  $y$ ;

$M(y) = m_y = \bar{y}$  - математическое ожидание процесса  $y$ ;

$M(x) = m_x = \bar{x}$  - математическое ожидание процесса  $x$ ;

$\tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_x$  - выборочные средние квадратические отклонения процессов.

Можно показать [1], что при этом уравнения (1), будут более представительно отражать статистические связи процессов и могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} x(t_k) &\simeq \alpha_{xx} x(t_{k-1}) + \beta_{xx}(t_k) = m_{x_k} + r_{xx} \frac{\tilde{\sigma}_{x_k}}{\tilde{\sigma}_{x_{k-1}}} (x(t_{k-1}) - m_{x_{k-1}}); \\ y(t_k) &\simeq \alpha_{yx} x(t_k) + \beta_{yx}(t_k) = m_y + r_{yx} \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} (x(t_k) - m_x), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $r_{xx}, r_{yx}$  - коэффициенты авто и взаимной корреляции процессов.

Алгоритмы получения эмпирических (выборочных) оценок числовых характеристик случайных последовательностей (среднего, дисперсии, коэффициентов корреляции) и анализ их качества представлены в лекции 4.

## Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего (АРСС(p,q))

Общая модель временного ряда представлена как результат действия механизма обработки предшествующих членов ряда и некоторого числа членов возбуждающей белой последовательности, т.е. в виде объединенной модели авторегрессии и скользящего среднего [1-3]:

$$x(k) = - \sum_{i=1}^p a_i x(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i \varepsilon(k-i), \quad (3)$$

где  $a_i, b_i$  - параметры авторегрессии и скользящего среднего, оцениваемые по временному ряду на основе методов математической статистики;

$\varepsilon(k)$  - случайная белая гауссовская последовательность независимых величин с нулевым математическим ожиданием, дельта-функцией корреляции и известной дисперсией.

Если  $q=0$ ,  $b(0)=1$ , то уравнение описывает модель *авторегрессии*, которая интерпретируется как механизм, генерирующий временной ряд, в котором наблюдение переменной  $x(k)$  в некоторый момент  $k$  выражается через систематическую зависимость от той же самой переменной в  $p$  моментах времени, непосредственно предшествующих  $k$  моменту плюс значение случайного возмущения  $\varepsilon(k)$  в момент  $k$ .

Таким образом, текущее значение  $x(k)$  выходного ряда выражается через линейную комбинацию из  $p$  предшествующих отсчетов, которые называют *предсказанными наблюдениями (прогнозом)*. С целью минимизации ошибки прогноза в процессе идентификации параметров авторегрессии будем пользоваться

критерием минимума среднеквадратической погрешности (дисперсии ошибки) прогноза.

Процесс авторегрессии будет стационарным только в случае, если его параметры лежат в определенном диапазоне. Например, если имеется только один параметр, то он должен находиться в интервале  $-1 < a_1 < +1$ . В противном случае, предыдущие значения будут накапливаться и значения последующих  $x(k)$  могут быть неограниченными, следовательно, ряд не будет *стационарным*. Для нескольких параметров авторегрессии можно определить условия, обеспечивающие стационарность.

Частным случаем авторегрессионной модели при  $p=1$  является марковский процесс

$$x(k) = a(k/k-1)x(k-1) + \varepsilon(k). \quad (4)$$

В этом случае связь последовательности выборочных значений коэффициентов корреляции с соответствующими значениями коэффициентов авторегрессии имеет вид [1]

$$r_{xx}(k) = a(1)r_{xx}(k-1) = a^k(1), \text{ при } r_{xx}(0) = 1, k \geq 0. \quad (5)$$

При этом зависимость  $r_{xx}(k)$  имеет монотонный экспоненциальный характер при  $0 \leq a(1) \leq 1$  и экспоненциальный с изменением знака при  $0 > a(1) > -1$ .

Дисперсия процесса имеет вид  $\sigma_x^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - a(1)r_{xx}(1)) = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - a^2(1))$ , где  $\sigma_\varepsilon^2 = \rho_w$  - дисперсия шума возбуждения.

При  $p=0$  смешанная модель преобразуется в модель *скользящего среднего*, реализующую механизм учета динамики изменения значений возбуждающей последовательности  $\varepsilon(k)$ . В отличие от процесса авторегрессии, в процессе скользящего среднего текущее наблюдение ряда представляет собой сумму случайного компонента  $\varepsilon(k)$  в данный момент времени и линейной комбинации взвешенных значений случайных воздействий в предыдущие  $q$  моментов времени. Определение оптимального значения параметров скользящего среднего основано на учете корреляций значений случайных воздействий на глубину  $q$  шагов.



Функциональная схема модели временного ряда на основе процессов авторегрессии и скользящего среднего представлена на рисунке 1.

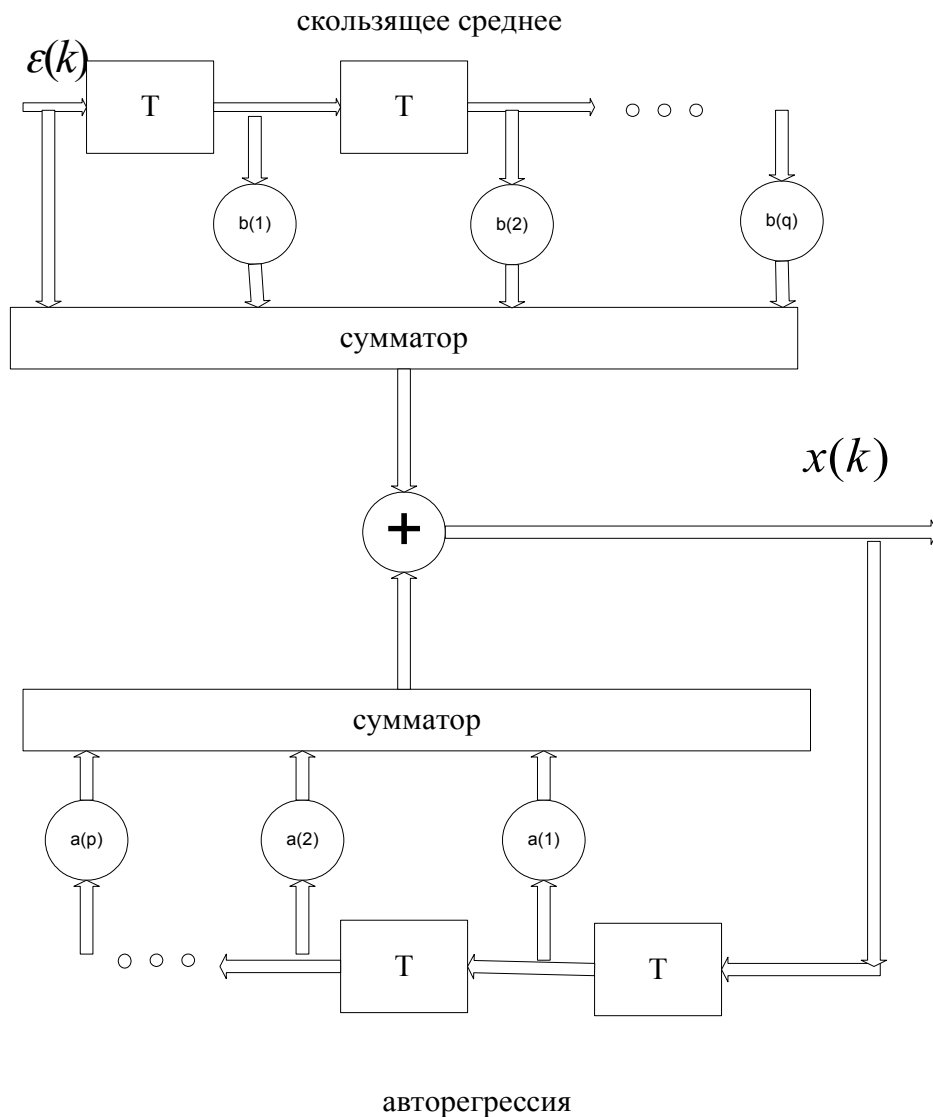


Рис.1. Функциональная схема модели временного ряда на основе АРСС (p, q)

Очень часто для получения оценок коэффициентов авторегрессии и скользящего среднего, а также дисперсии шума возбуждения в модели АРСС(p,q) используют отдельные субоптимальные процедуры их определения [1]. Вначале оценивают коэффициенты АР на основе процедуры наименьших квадратов и уравнения Юла-Уолкера, затем на их основе формируют модель временного ряда и получают разностный ряд между принятым и смоделированным, а последовательность остаточных ошибок (разностный ряд) используется в дальнейшем для определения коэффициентов СС.

### *Методы оценки параметров авторегрессии*

Рассмотрим методы оценки параметров авторегрессии и скользящего среднего на основе информации, содержащейся в выборочных данных (3-5) и рекуррентных уравнений Юла-Уолкера [1].

Если обе части уравнения (3) умножить на  $x(n-m)$  и взять математическое ожидание, то получим уравнение для частных (на определенный временной сдвиг  $m$ ) автокорреляционных функций и коэффициентов автокорреляции:

$$M(x(n)x(n-m)) = - \sum_{k=1}^p a_k M(x(n-k)x(n-m)) + \sum_{k=0}^q b_k M(\varepsilon(n-k')x(n-m)) \quad \text{или}$$

$$r_{xx}(m) = - \sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k) + \sum_{k=0}^q b_k r_{\varepsilon x}(m-k'), \quad (6)$$

где  $r_{\varepsilon x}(m-k') = \rho_w$ , при  $\{k'=0\}$  - дисперсия шума возбуждения.

Можно показать [1], что это выражение, связывающее параметры авторегрессии, скользящего среднего и временную последовательность

выборочных значений коэффициента автокорреляции, можно представить в следующем виде:

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} r'_{xx}(-m), & m < 0; \\ -\sum_{k=1}^p a(k)r_{xx}(m-k) + \rho_w \sum_{k=m}^q b(k)h'(k-m), & 0 \leq m \leq q; \\ -\sum_{k=1}^p a(k)r_{xx}(m-k), & m \geq q, \end{cases} \quad (7)$$

где  $h(k), h(0)=1$  - импульсная характеристика формирующего фильтра.

Полагая в выражении (7)  $q=0$  и записывая полученное выражение в матричной форме, получим следующую систему из  $P$  уравнений для определения коэффициентов авторегрессии [1]

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \\ a(2) \\ \dots \\ a(p) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-p+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}(p) & r_{xx}(p-1) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_w \\ 0(1) \\ \dots \\ 0(p) \end{bmatrix}$$

или в другой форме

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \dots \\ r_{xx}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \dots \\ a(p) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(p-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(p-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Выражение (8) можно также представить в следующей векторно-матричной форме относительно вектора  $\vec{a}$

$$\vec{a} = P_p^{-1} \vec{r}_p,$$

где

$$P_p = \begin{bmatrix} 1 & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(p-1) \\ r_{xx}(1) & 1 & \dots & r_{xx}(p-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- матрица коэффициентов корреляции.

Для случая  $p=2$  система уравнений Юла-Уолкера (8) имеет вид [1]

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1 + a_2 r_1, \\ r_2 &= a_1 r_1 + a_2, \end{aligned}$$

решая которую получаем значения коэффициентов авторегрессии

$$a_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}; \quad a_2 = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}.$$

Допустимые значения  $r_{xx}(m)$  для стационарного процесса АР ( $p=2$ ) должны лежать в пределах [1]

$$\begin{aligned} -1 &\leq r_1, r_2 \leq 1, \\ r_1^2 &< \frac{1}{2}(r_2+1). \end{aligned}$$

Дисперсия процесса АР (2) равна [1]  $\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-r_1 a_1 - r_2 a_2}$ .

В общем случае коэффициенты уравнения авторегрессии можно найти из решения уравнения Юла-Уолкера (8) зная последовательность из  $p+1$  отсчетов для коэффициента корреляции значений элементов ряда. Количество выполняемых при этом операций пропорционально  $p^2$ .

Полагая в (7)  $p=0$  и замечая, что  $h(k)=b(k)$  при  $1 \leq k \leq q$ , получаем выражение для определения коэффициентов скользящего среднего

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} 0, & m \geq q; \\ \rho_w \sum_{k=m}^q b(k)b'(k-m), & 0 \leq m \leq q; \\ r'_{xx}(-m), & m \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что автокорреляционная последовательность и параметры скользящего среднего связаны нелинейным соотношением типа свертки, что делает их определение достаточно сложным. Относительно просто определяются коэффициенты скользящего среднего (СС) для случая  $q=1$ . В этом случае процесс СС( $q=1$ ) можно представить в виде

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1) = \varepsilon(k) - b_1 \varepsilon(k-1), \quad \text{где } b_1 - \text{коэффициент СС первого порядка.}$$

Можно показать [1], что значение искомого коэффициента в этом случае определяется из решения следующего уравнения  $b_1^2 + b_1/r_1 + 1 = 0$ ,

$$\text{где } r_1 = \begin{cases} -b_1 / (1 + b_1^2), & k=1; \\ 0, & k>1 \end{cases} \quad \text{- значения автокорреляционной функции для СС (1).}$$

Для выполнения стационарности моделируемого процесса значения коэффициентов СС должны удовлетворять условию обратимости, т.е.

$$b_1(b_1)^{-1} = 1, \quad -1 < b_1 < 1.$$

Таким образом, процесс АРСС<sub>(2,1)</sub> может быть представлен выражением

$$x(k) = a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + \varepsilon(k) - b_1 \varepsilon(k-1).$$

На этапе *идентификации* порядка модели необходимо решить, какое число параметров авторегрессии ( $p$ ) и скользящего среднего ( $q$ ) должно присутствовать в эффективной и *экономной* модели процесса. На практике очень редко бывает, что число параметров  $p$  или  $q$  больше 2.

Встречаются и более сложные модели, например, учитывающие тренд. Основным ограничением при применении описанной смешанной модели является стационарность моделируемого временного ряда.

### ***Модель авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС( $p, d, q$ )).***

Дальнейшим развитием модели на случай нестационарного временного ряда является модель АРПСС ( $p, d, q$ ), предложенная Боксом и Дженкинсом [1], которая включает три типа параметров: параметры авторегрессии ( $p$ ), порядок разности ( $d$ ) и параметры скользящего среднего ( $q$ ), которые вычисляются для ряда после взятия разности с лагом  $d$ . Расширение области моделирования в этой модели достигается путем перехода к моделированию не самих значений процесса  $x(k)$ , а разности между значениями ряда до  $d$ -го порядка включительно, обладающей стационарными свойствами, что означает постоянство ее среднего и неизменность во времени соответствующих выборочных дисперсии и автокорреляции. Для того чтобы определить необходимый порядок разности, нужно исследовать график исходного ряда и автокорреллограмму. Сильные изменения уровня (сильные скачки вверх или вниз) обычно требуют взятия несезонной разности первого порядка (лаг= $1$ ), а сильные изменения наклона требуют взятия разности второго порядка.

Процесс оценивания параметров авторегрессии и скользящего среднего проводится по преобразованным данным (подвергнутым применению разностного оператора). До построения прогноза нужно выполнить обратную операцию

(интегрировать данные). Таким образом, прогноз – проинтегрированное значение разности будет сравниваться с соответствующими исходными данными. На интегрирование данных указывает буква *И* в общем названии модели (АРПСС = Авторегрессионное Проинтегрированное Скользящее Среднее).

Большинство встречающихся на практике временных рядов можно с достаточной степенью точности аппроксимировать одной из 5 основных моделей, которые можно идентифицировать по виду автокорреляционной (АКФ) и частной автокорреляционной функции (ЧАКФ) – ненулевому значению АКФ для конкретного  $k \leq p$ .

1. *Один параметр (p)*: АКФ - экспоненциально убывает; ЧАКФ - имеет резко выделяющееся значение для лага 1, нет корреляций на других лагах.
2. *Два параметра авторегрессии (p)*: АКФ имеет форму синусоиды или экспоненциально убывает; ЧАКФ имеет резко выделяющиеся значения на лагах 1, 2, нет корреляций на других лагах.
3. *Один параметр скользящего среднего (q)*: АКФ имеет резко выделяющееся значение на лаге 1, нет корреляций на других лагах. ЧАКФ экспоненциально убывает.
4. *Два параметра скользящего среднего (q)*: АКФ имеет резко выделяющиеся значения на лагах 1, 2, нет корреляций на других лагах. ЧАКФ имеет форму синусоиды или экспоненциально убывает.
5. *Один параметр авторегрессии (p) и один параметр скользящего среднего (q)*: АКФ экспоненциально убывает с лага 1; ЧАКФ - экспоненциально убывает с лага 1.

## *Рекуррентный алгоритм оценки параметров временного ряда, оптимальный по критерию наименьших квадратов*

Реализация непрерывного управления качеством обслуживания нагрузки требует определения параметров авторегрессии модели АРСС  $(p, q)$  в темпе текущего времени в отличии от алгоритмов, основанных на решении уравнения Юла-Уолкера [1-3]. Такие возможности открываются при использовании рекуррентного алгоритма наименьших квадратов (РНК), который при поступлении новых текущих данных  $x(N+1)$  позволяет переходить от вектора коэффициентов линейного предсказания  $\vec{a}_{p,N}$  к вектору  $\vec{a}_{p,N+1}$ , не решая уравнение Юла-Уолкера [1].

Для получения алгоритма РНК выражение для ошибки линейного предсказания вперед при использовании выборки размером  $N$  для  $k$ -го временного шага и глубины регрессии  $p$  запишем в следующем виде [1]:

$$e'_{p,N}(n) = \vec{x}_{p,N}^T(n) \vec{a}'_{p,N}(n), \quad (10)$$

где  $\vec{x}_{p,N}^T = (x(n); x(n-1) \dots x(n-p))$  - вектор значений временного ряда размерностью  $p+1$ ;

$\vec{a}'_{p,N}(n) = (1 ; \{a'_{p,N}(n-1) \dots a'_{p,N}(n-p)\})^T$  - вектор значений коэффициентов авторегрессии размерностью  $p+1$ .



Так как суммирование в выражении для ошибки осуществляется с учетом отрицательного знака при коэффициентах авторегрессии, то в результате получаем разность между значением ряда в момент времени  $k$  и взвешенными значениями регрессии на прошлые значения ряда глубиной  $p$ .

Введем понятие суммы экспоненциально взвешенных квадратов ошибок предсказания на всей длине выборки  $\rho'_{p,N} = \sum_{k=1}^N w^{N-k} (e'_{p,N}(n))^2$ .

Можно показать [1], что вектор коэффициентов линейного предсказания  $\vec{a}_{p,N}$ , минимизирующий сумму экспоненциально взвешенных с весом  $w^{N-k}$  квадратов ошибок  $\rho'_{p,N}$ , удовлетворяет решению уравнения

$$R_{p,N} \vec{a}_{p,N} = \begin{pmatrix} \rho'_{p,N} \\ 0_p \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $R_{p,N} = \begin{bmatrix} r_{p,N}(0,0) & r_{p,N}^T \\ r_{p,N} & R_{p-1,N-1} \end{bmatrix}$  - рекуррентная матрица коэффициентов автокорреляции;

$\vec{a}_{p,N} = [1, a_{1,N} \dots a_{p,N}]^T$  - вектор коэффициентов авторегрессии;

$r_{p,N}(0,0) = \sum_{n=1}^N w^{N-n} (x(n))^2$  - взвешенная дисперсия наблюдаемой последовательности.

Тогда основу базового РНК-алгоритма составляют следующие выражения для векторов коэффициентов предсказания, коэффициентов усиления и дисперсии ошибки фильтрации [1]:

$$\vec{a}_{p,N+1} = \begin{cases} \vec{a}_{p,N} - P_N \vec{x}'_{p-1}(N) (\vec{x}_{p-1}^T(N) \vec{a}_{p,N} + \vec{x}(N+1)) = \\ \quad \vec{i} = \vec{a}_{p,N} - \vec{e}_{p,N}^f(N+1) P_N \vec{x}'_{p-1}(N) = \\ \quad \vec{i} = \vec{a}_{p,N} - \vec{e}_{p,N}^f(N+1) \vec{c}_{p-1,N}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\vec{c}_{p-1,N} = P_{N-1} \vec{x}'_{p-1}(N) / (w + \vec{x}_{p-1}^T(N) P_{N-1} \vec{x}'_{p-1}(N));$$

$$P_N = w^{-1} (I - \vec{c}_{p-1,N} \vec{x}_{p-1}^T(N)) P_{N-1},$$

где  $\vec{e}_{p,N}^f(N+1) = \vec{x}^T \vec{a}_{p,N} + \vec{x}(N+1)$  - вектор остаточных ошибок фильтрации, т.к. в отличие от ошибки предсказания здесь используется вектор  $\vec{a}_{p,N}$ , а не  $\vec{a}_{p,N+1}$ ;

$\vec{c}_{p-1,N} = P_N \vec{x}'_{p-1}(N)$  - вектор коэффициентов усиления остаточной ошибки фильтрации ("невязки");

$w$  - взвешивающий множитель, принимающий значение в пределах  $[0, 1]$ ;

$P_{N-1} = R_{p-1,N-1}^{-1}$  - матрица дисперсий ошибок фильтрации;

$R_{p-1,N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \omega^{N-1-n} \vec{x}'_{p-1}(n) \vec{x}_{p-1}^T(n)$  - матрица размерностью  $(p-1 \times p-1)$  взвешенных с весом  $0 < \omega < 1$  вторых моментов процесса на шагах  $p-1$ , усредняемых по выборке объемом  $N-1$ .

Исходные данные для работы фильтра задаются в виде  $\vec{a}_0$  и  $P_{p,0} = \varepsilon I$ , где  $I$  - единичная матрица, а  $\varepsilon$  некоторая положительная величина, обеспечивающая обратимость матрицы  $P_{p,0}$ . Структура алгоритма аналогична структуре известного алгоритма фильтрации Калмана [3].

Существенное уменьшение вычислительных затрат с  $p^2$  операций до  $5p$  может быть достигнуто при использовании быстрых РНК-алгоритмов вычисления

$\vec{a}_{p,N}$ . Ключевым моментом ускорения при этом является введение процедуры обновления значений вектора коэффициентов усиления  $\vec{c}_{p-1,N}$  с использованием лишь векторных операций вместо векторно-матричных [1-3].

### *Методы прогноза временных рядов*

Экспоненциальное сглаживание – как метод прогнозирования многих временных рядов был независимо открыт Броуном и Холтом, а Gardiner (1985) предложил "единую" классификацию методов экспоненциального сглаживания [19,20].

#### *Простое экспоненциальное сглаживание*

Простая модель временного ряда имеет следующий вид:

$$X_t = b + \varepsilon_t, \quad (13)$$

где  $b$  - константа и  $\varepsilon$ (эпсилон) - случайная ошибка. Константа  $b$  относительно стабильна на каждом временном интервале, но может также медленно изменяться со временем. Один из интуитивно ясных способов выделения  $b$  состоит в том, чтобы использовать сглаживание скользящим средним, в котором последним наблюдениям приписываются большие веса, чем предпоследним, предпоследним большие веса, чем пред-предпоследним и т.д. Простое экспоненциальное сглаживание именно так и устроено. Здесь более старым наблюдениям приписываются экспоненциально убывающие веса, при этом, в отличие от скользящего среднего, учитываются *все*

предшествующие наблюдения ряда, а не те, что попали в определенное окно. Формула простого экспоненциального сглаживания имеет следующий вид:

$$S_t = \alpha * X_t + (1 - \alpha) * S_{t-1}. \quad (14)$$

Когда эта формула применяется рекурсивно, то каждое новое сглаженное значение (которое является также прогнозом) вычисляется как взвешенное среднее текущего наблюдения и сглаженного ряда. Очевидно, результат сглаживания зависит от параметра  $\alpha$  (*альфа*). Если  $\alpha$  равно 1, то предыдущие наблюдения полностью игнорируются. Если  $\alpha$  равно 0, то игнорируются текущие наблюдения. Значения  $\alpha$  между 0, 1 дают промежуточные результаты.

Эмпирические исследования [1] показали, что простое экспоненциальное сглаживание дает достаточно точный прогноз.

На практике параметр сглаживания часто ищется с *поиском на сетке*. Возможные значения параметра разбиваются сеткой с определенным шагом. Например, рассматривается сетка значений от  $\alpha = 0.1$  до  $\alpha = 0.9$ , с шагом 0.1. Затем выбирается  $\alpha$ , для которого сумма квадратов (или средних квадратов) остатков (наблюдаемые значения минус прогнозы на шаг вперед) является минимальной. Рекомендуется брать начальное значение  $S_0$ , дающее наилучший прогноз. С другой стороны, влияние выбора уменьшается с длиной ряда и становится не критичным при большом числе наблюдений.

### *Общая модель.*

Основная идея сезонной декомпозиции проста. В общем случае временной ряд типа того, который описан выше, можно представить себе состоящим из четырех различных компонентов: (1) сезонного компонента (обозначается  $S_t$ , где  $t$  обозначает момент времени), (2) тренда ( $T_t$ ), (3) циклического компонента ( $C_t$ ) и (4) случайного (флуктуационного) компонента ( $I_t$ ). Разница между циклическим и сезонным компонентами состоит в том, что последний имеет регулярную (сезонную) периодичность, тогда как циклический фактор имеет более длительный эффект, который к тому же меняется от цикла к циклу. Обычно тренд и циклический компонент объединяют в один *тренд-циклический компонент* ( $TC_t$ ). Конкретные функциональные взаимосвязи между этими компонентами могут иметь самый разный вид. Для случая аддитивной взаимосвязи имеем:

$$X_t = TC_t + S_t + I_t \quad (15)$$

Здесь  $X_t$  обозначает значение временного ряда в момент времени  $t$ .

Качество прогноза определяется временем упреждения и точностью. Время упреждения, в свою очередь, определяется временем запаздывания в принятии решений по изменению плана распределения ресурсов ретранслятора, а точность прогноза определяется вероятностью достижения заданной погрешности прогнозирования.

## ***Марковские процессы и модели.***

Случайный процесс называется **марковским** , если вероятность любого состояния в будущем зависит только от его состояния в настоящем и не зависит от того , когда и каким образом процесс оказался в этом состоянии.

Описывающий поведение системы процесс называется цепью Маркова.

Для того чтобы случайный процесс с непрерывным временем был марковским , необходимо , чтобы интервалы времени между соседними переходами из состояния в состояние были распределены по экспоненциальному закону .

Использование марковских моделей позволяет существенно снизить размерность математического описания процессов при сохранении сведений о вероятностно-временном механизме изменения их состояния.

Рассмотрим два основных класса марковских процессов и соответствующих им моделей: непрерывные по состоянию случайные последовательности на базе стохастических разностных уравнений (СРУ) и дискретные по состоянию последовательности (цепи), описываемые также СРУ.

### ***Марковские модели непрерывных процессов.***

Пусть экспоненциально коррелированный исследуемый управляемый процесс описывается вектором фазовых координат  $x(k+1)$ , подчиняющийся нормальному закону распределения:

$$p(x) = \frac{1}{[(2\pi)^I |D_x|]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T D_x^{-1} (x-\bar{x})};$$

где  $\bar{x}$  - вектор математических ожиданий (средних ) процесса  $\bar{x}(k)$ ;

$|D_x| = |\sigma_{ij}|, i=1, I$  - определитель матрицы дисперсии процесса  $\bar{x}(k)$  .

Пусть также существует некоторый возбуждающий процесс  $\vec{v}(k)$ , являющийся независимым по отношению к  $\vec{x}(k)$  и подчиняющийся тоже нормальному распределению.

Тогда теоремы Дж.Дуба определяют возможность представления векторной гауссовской (марковской) последовательности с экспоненциальной функцией корреляции СРУ следующего вида:

$$\vec{x}(k+1) = A(k+1, k)\vec{x}(k) + B(k)\vec{u}(k) + G(k)v(k), (2.)$$

где  $A(k+1, k) = \{\alpha_{ij}(k)\}$  - диагональная матрица состояния размерностью  $I \times J$ , ненулевые элементы которой  $\alpha_{ii}(k)$  представляют собой скорости изменений (иначе спектры флуктуаций) значений процессов  $x_i(k)$ ;

$B(k)$  - матрица эффективности управления  $\vec{u}(k)$ ;

$G(k)$  - матрица диффузии процесса, элементы которой определяются параметрами

шума возбуждения  $g_{ii} = \alpha_i T \left( \frac{\sigma_i^2}{\alpha_i V_{ii}} \right)^{\frac{1}{2}}$ ;

$\sigma_i^2$  - дисперсия  $i$ -го процесса  $x_i(k)$ ;

$\alpha_i = \frac{1}{\tau_{кор_i}}$  - скорость изменения процесса  $x_i(k)$ , величина обратно пропорциональная его интервалу корреляции;

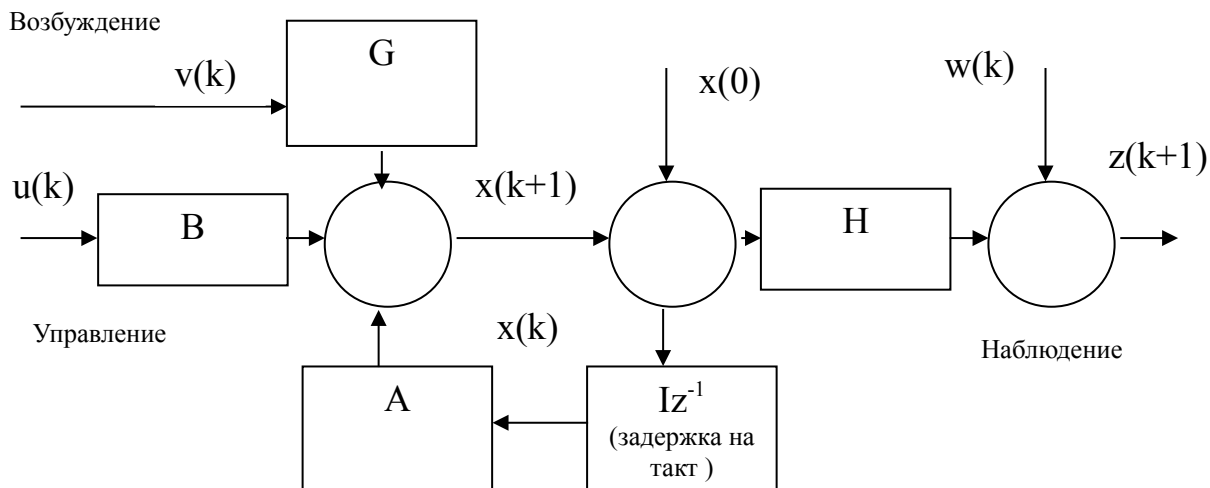
$T$  - период дискретизации по времени процесса;

$v(k)$  - вектор белых возбуждающих последовательностей с нулевым средним и ковариационной матрицей  $M [\vec{v}(k)\vec{v}(s)] = V(k)\delta(k-s)$ ;

$V(k)$  - матрица спектральных плотностей мощности процессов  $v(k)$ , диагональные члены которой характеризуют нормированные дисперсии  $V_{ii}$  возбуждающих  $i$ -х последовательностей;

$\delta(k-s)$  - символ Кронекера - индикатор равенства элементов, формально: функция двух целых переменных, которая равна 1, если они равны, и 0 в противном случае.

Рисунок. 2. Структурная схема формирующего фильтра для марковского процесса





## Марковские модели дискретных последовательностей.

Простейшей моделью, описывающей дискретные по состояниям и времени процессы, является цепь Маркова. Пусть дискретному множеству состояний стохастического объекта управления  $x(k) \in X = \{1, \dots, i, \dots, I\}$  в дискретные моменты времени  $k \in T = \{1, \dots, k, \dots, K\}$  соответствует конечное множество решений (управлений)  $u_i(k)$ ,  $x \in U = \{1, \dots, s, \dots, S\}$ . Простейшей моделью, описывающей вероятностно-временной механизм изменения дискретных по состояниям и времени управляемых случайных последовательностей, является простая однородная управляемая цепь Маркова. Цепь задается вектором вероятностей начальных состояний процесса  $\mathbf{P}(0) = \{p_i(0)\}$ , матрицей одношаговых переходных вероятностей  $\mathbf{P}^u(k/k-1) = \{p_{ij}^u(k/k-1)\}$ , а также периодом смены состояния марковской цепи  $(t_k - t_{k-1} = T)$ . Под простой цепью понимается односвязная цепь, удовлетворяющая марковскому свойству, а однородность цепи связана с постоянством значений элементов матрицы одношаговых переходных вероятностей.

Для однородной управляемой марковской цепи вероятность принятия ею  $i$ -го состояния на  $k$ -м шаге определяется следующей рекуррентным уравнением Маркова:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^I p_j(0) p_{ij}^u(k/k-1), \quad i, j = 1, \dots, I, \quad u \in U = \{1, \dots, s, \dots, S\}, \quad (3)$$

где

$$P^{\bar{u}}(k/k-1) = \{p_{ij}^{\bar{u}}(k/k-1)\} = \left\{ \sum_{m=1}^I p_{im}^{(k-n)} p_{mj}^{(n)} \right\} = [P^{\bar{u}}(1/0)]^k, \quad 0 < n < k$$

-матрица одношаговых переходных вероятностей на  $k$ -й шаг, определяемая из уравнения Колмогорова-Чепмена;

$$\sum_{i=1}^I p_{ij} = 1, \sum_i p_i = 1, p_i \geq 0, p_{ij} \geq 0 \text{ - условие нормировки и ограничения.}$$

Здесь вектор начальных вероятностей определяет значения вероятностей принятия процессом  $x(0)$  состояния  $i$  в нулевой момент времени, при этом если процесс в момент  $k-1$  принял состояние  $x(k-1)=i$ , то одношаговая вероятность перехода  $p_{ij}(k/k-1)$  определяет вероятность принятия процессом на следующем шаге  $k$  состояния  $j$ .

Для агрегированной марковской цепи элементы новой укрупненной матрицы одношаговых переходных вероятностей определяются соотношением:

$$p^{(n)}_{i'j'} = p_{ij} / \sum_i p_{ij}, i' = \overline{1, I'}, I' \subset I. \text{ Время смены состояний } T^{(n)} \text{ новой укрупненной цепи}$$

также изменяется и становится большим по сравнению с  $T$ .

Свойство эргодичности определяется наличием в цепи одного класса сообщающихся состояний. Следовательно, при  $k$ , стремящемся к  $\infty$ -ти эргодическая цепь становится стационарной, а в остальное время она находится в переходном состоянии. Для эргодической цепи также может быть определена корреляционная функция

$$K_x(kT) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I x_i x_j p(x_i, x_j, kT) - \left( \sum_{i=1}^I x_i p_i \right)^2,$$

где  $p(x_i, x_j, kT) = p_i p_{ij}(kT)$  - совместная вероятность принятия состояний процессом  $x$  в моменты времени, отстоящие на  $kT$ ;

$p_i$ - вероятность принятия процессом значения  $i$  в начальный момент времени.

Основным недостатком представленного описания является невозможность представления с его помощью выборочных значений (реализации) случайного процесса  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ . Поэтому в работах [2,3] введены специальные индикаторы состояния моделируемых последовательностей:

$$\theta_m(k) = x_m \quad (4)$$

В этом случае выборочные значения процесса  $x(k)$  определяются соотношением следующего вида:

$$x(k) = C^T(k) \theta(k), \quad (5)$$

где  $C^T(k) = [x_m]$  - строка возможных состояний процесса  $x(k)$ ;

$m = 1, \dots, M$  - номер состояния дискретного процесса, для которого выполняется условие  $\{x_1 < x_2 < \dots < x_m < \dots < x_M\}$ .

Наконец, для случая однородной марковской цепи можно записать следующее уравнение состояния:

$$\begin{aligned} \vec{\theta}(k+1) &= F(k+1, k, \vec{u}) \vec{\theta}(k) + \Delta \vec{\theta}(k), \\ \Delta \vec{\theta}(k) &= \Phi(G(k) \vec{v}(k), \vec{\theta}(k), \Lambda), \end{aligned} \quad (6)$$

$$x(k+1) = C^T(k+1) \theta(k+1),$$

где  $F(k+1, k) = [I + T Q^T(k+1, k, \vec{u})]$  – матрица вероятностей перехода процесса из одного состояния в другое на соседних шагах;

$Q(k+1, k, \vec{u}) = [q_{ml}]$  – матрица интенсивностей перехода процесса  $\vec{x}(k)$ ; ;

$q_{mm}(\vec{u}) = -\sum_{m \neq l} q_{ml}(\vec{u})$  – диагональные члены матрицы интенсивностей;

$T_c$  – период смены состояний цепи;

$I$  – единичная матрица соответствующей размерности;

$\Phi(\cdot)$  – функция формирования компенсирующей последовательности на основе случайного выбора на каждом шаге из исходной матрицы добавок  $\Delta$  ту, которая обеспечит заданные статистические характеристики моделируемого процесса;

$G(k) = \text{diag} \left\{ T_c \sqrt{\frac{2 \sigma_\theta^2 q_{mm}}{V_m}} \right\}$  – матрица диффузии процесса  $x(k)$ ;

$V_m$  – спектральная плотность мощности возбуждающего шума;

$\Delta \theta(k)$  – вектор последовательностей, компенсирующий дробные значения первого слагаемого в выражении (6.);

Таким образом, дискретное состояние объекта управления в любой  $k$ -й момент времени, при марковской природе происходящих в нем процессов, определяется состоянием объекта на предыдущем шаге, матрицей вероятностей перехода и диффузионными свойствами шума возбуждения (случайным значением дискретного приращения, компенсирующего нецелочисленную часть прогноза состояния).

Порядок определения вектора компенсирующих последовательностей  $\vec{v}(k)$  в выражении (6.) подробно рассмотрен в работе[3].

Наряду с уравнениями состояния (2.,6) полная математическая модель случайного процесса обычно содержит уравнение наблюдения за его состоянием следующего вида:

$$\vec{z}(k) = H(k)\vec{x}(k) + \vec{w}(k), \quad (7)$$

где

$\vec{z}(k)$  – процесс наблюдения за процессом  $x(k)$ ;

$H(k)$  - матрица наблюдения, элементы которой определяют способ преобразования измерений в значения процесса  $x(k)$ ;

$\vec{w}(k)$  – вектор непрерывных гауссовских последовательностей со средним, равным нулю и ковариационной матрицей  $M \{ w(k)w(s) \} = R(k)\delta(k - s)$ ;

$R(k)$  – матрица спектральных плотностей мощности процесса  $\vec{w}(k)$ .

Примеры моделей СМО с марковскими моделями подробно рассматривались на практических занятиях.