

# Практическая работа 1

## Определение пропускной способности канала

### 1.1. Задание

Получить представление о теореме Шеннона. Научиться определять пропускную способность канала в зависимости от полосы частот и отношения сигнал-шум. Научиться оценивать изменение отношения сигнал-шум при изменении полосы частот.

### 1.2. Теоретические сведения

Зависимость пропускной способности канала  $C$  (скорости передачи данных), обладающего определенной полосой пропускания  $B$ , от отношения мощности сигнала к мощности шума  $SNR$  исследовал американский инженер и математик Клод Шеннон.

Теорема Шеннона для канала с шумами связывает пропускную способность канала передачи информации и существование кода, который возможно использовать для передачи информации по каналу с ошибкой, стремящейся к нулю (при увеличении длины блока). Прямая теорема гласит, что если скорость передачи сообщений меньше пропускной способности канала связи, то существуют коды и методы декодирования такие, что средняя и максимальная вероятности ошибки декодирования стремятся к нулю, когда длина блока стремится к бесконечности. То есть для канала с помехами всегда можно найти такую систему кодирования, при которой сообщения будут переданы со сколь угодно большой степенью верности, если только производительность источника не превышает пропускной способности канала.

Максимальная скорость передачи, для которой имеется возможность исправить ошибки в канале с заданным отношением сигнал/шум получила название *границы Шеннона* (Shannon limit).

*Отношение сигнал/шум* (ОСШ; signal-to-noise ratio;  $SNR$ ) — безразмерная величина, равная отношению мощности полезного сигнала к мощности шума.

$$SNR = \frac{P_c}{P_{ш}} = \left( \frac{A_c}{A_{ш}} \right)^2, \quad (1.1)$$

где  $P$  — средняя мощность, а  $A$  — среднеквадратичное значение амплитуды. И сигнал, и шум измеряются в полосе пропускания системы.

Обычно отношение сигнал/шум выражается в децибелах (дБ). Чем больше это отношение, тем меньше шум влияет на характеристики системы.

$$SNR_{[dB]} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_c}{P_{ш}} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{A_c}{A_{ш}} \right). \quad (1.2)$$

В теории информации чаще всего применяется так называемая *теорема Шеннона-Хартли*, которая описывает вариант применения теоремы Шеннона для канала с шумами в случае модели непрерывного аналогового канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ). Теорема представлена в виде формулы (1.3).

$$C = B \cdot \log_2(1 + SNR). \quad (1.3)$$

С учетом правил логарифмирования, для  $SNR \gg 1$ , формула (1.3) может быть упрощена.

$$C \approx 0,3 \cdot B \cdot 10 \log_{10}(SNR). \quad (1.4)$$

Из вида теоремы Шеннона-Хартли следует, что теоретически при нулевом уровне шума можно получить сколь угодно высокую скорость передачи при сколь угодно низкой полосе пропускания канала. На практике это, конечно же, невозможно.

*Аддитивный белый гауссовский шум* (АБГШ) — вид мешающего воздействия в канале передачи информации. Характеризуется равномерной спектральной плотностью, нормально распределённым значением амплитуды и аддитивным способом воздействия на сигнал (т. е. шум суммируется с полезным сигналом). Наиболее распространённый вид шума, используемый для расчёта и моделирования систем радиосвязи. В природе и технике белый шум, имеющий одинаковую спектральную мощность на всех частотах, не встречается (ввиду того, что такой сигнал имел бы бесконечную мощность), однако под категорию белых шумов попадают любые шумы, спектральная плотность которых одинакова (или слабо отличается) в рассматриваемом диапазоне частот.

Мощность шума в канале АБГШ можно рассчитать по формуле (1.5).

$$P_{\text{ш АБГШ}} = N_0 \cdot B, \quad (1.5)$$

где  $N_0$  — спектральная плотность мощности АБГШ в полосе 1 Гц (измеряется в Вт/Гц);  $B$  — полоса пропускания канала, Гц. Соответственно, чем шире полоса пропускания в канале с АБГШ, тем выше мощность шума, тем меньше отношение сигнал/шум при неизменной мощности сигнала.

Из формул (1.5) и (1.2) можно вывести зависимость изменения отношения сигнал/шум (в децибеллах) от изменения полосы пропускания. Пусть  $B_1$  — начальная полоса пропускания, а  $B_2$  — увеличенная полоса пропускания, тогда изменение отношения сигнал/шум от изменения полосы пропус-

ния будет представлено формулой (1.6).

$$\begin{aligned}\Delta SNR_{[dB]} &= 10\log_{10}\left(\frac{P_c}{P_{ш1}}\right) - 10\log_{10}\left(\frac{P_c}{P_{ш2}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\frac{P_c}{P_{ш1}}}{\frac{P_c}{P_{ш2}}}\right) = \\ &= 10\log_{10}\left(\frac{P_{ш2}}{P_{ш1}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{N_0 \cdot B_2}{N_0 \cdot B_1}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{B_2}{B_1}\right).\end{aligned}\quad (1.6)$$

Для примера определим пропускную способность телефонного канала 0,3–3,4 кГц при отношении сигнал/шум  $SNR_{[dB]} = 30$  дБ. Будем считать, что шумы в канале являются шумами АБГШ. Полоса пропускания  $B$  равна

$$B = 3,4 - 0,3 = 3,1 \text{ кГц.}$$

Абсолютная величина отношения сигнал/шум, исходя из формул (1.1) и (1.2), будет равна

$$SNR = 10^3 = 1000.$$

Следовательно, согласно формуле (1.4), предельная пропускная способность канала будет равна

$$C = 0,3 \cdot 3,1 \cdot 10\log_{10}(1000) = 27,9 \text{ кбит/с.}$$

Более точно предельную пропускную способность можно рассчитать по формуле (1.3).

$$C = 3,1 \cdot \log_2(1 + 1000) \approx 30,9 \text{ кбит/с.}$$

Рассмотрим, что произойдет при увеличении верхней границы полосы пропускания до 10 кГц. Ширина полосы пропускания в этом случае будет равна

$$B_2 = 10 - 0,3 = 9,7 \text{ кГц.}$$

Изменение отношения сигнал/шум согласно формуле (1.6) будет равно

$$\Delta SNR_{[dB]} = 10\log_{10}\left(\frac{9,7}{3,1}\right) \approx 5 \text{ дБ.}$$

Соответственно, отношение сигнал/шум будет равно

$$SNR_{[dB]2} = 30 - 5 = 25 \text{ дБ,}$$

А в абсолютном значении

$$SNR_2 = 10^{2,5}.$$

Согласно формуле (1.4), предельная пропускная способность канала будет равна

$$C = 0,3 \cdot 9,7 \cdot 10\log_{10}(10^{2,5}) = 72,75 \text{ кбит/с.}$$

Более точно предельную пропускную способность рассчитаем по формуле (1.3).

$$C = 9,7 \cdot \log_2(1 + 10^{2,5}) \approx 80,6 \text{ кбит/с.}$$

### Список использованных источников

1. Семенов Ю. А. «Передача сигналов по линиям связи». Материал с сайта <http://book.itер.ru/>.
2. С. В. Мелихов, В. А. Кологривов «Взаимосвязь качественных характеристик для различных видов цифровой манипуляции». Доклады ТУСУРа. № 6. Декабрь 2006.
3. «Аддитивный белый гауссовский шум». Материал с сайта <https://ru.wikipedia.org/>.
4. «Белый шум». Материал с сайта <https://ru.wikipedia.org/>.
5. Песков С. Н., Таценко В. Г., Шишов А. К. «Расчет шумов реверсного канала». Материал с сайта <http://www.telesputnik.ru/>.
6. «Теоремы Шеннона для канала с шумами». Материал с сайта <https://ru.wikipedia.org/>.
7. «Теорема Шеннона-Хартли». Материал с сайта <https://ru.wikipedia.org/>.

### 1.3. Порядок выполнения задания

1. Выбрать из табл. 1.1 согласно своему номеру варианта исходные данные для расчета.

Таблица 1.1

Варианты задания (указаны согласно номеру студента в журнале)

№ вар.	Границы полосы пропускания		$SNR_{[dB]}$	$B_2^{верх}$
	$B^{ниж}$	$B^{верх}$	дБ	
1	9,4 кГц	32,8 кГц	38	62,6 кГц
2	2,5 МГц	37,7 МГц	31	65,9 МГц
3	0,6 кГц	37,5 кГц	40	61,4 кГц
4	9,8 МГц	22,1 МГц	35	68,1 МГц
5	9,1 кГц	24,1 кГц	33	59,5 кГц
6	3,5 МГц	24,7 МГц	38	62,6 МГц
7	3,3 кГц	38,5 кГц	39	68,5 кГц
8	8,2 МГц	21,8 МГц	36	61,3 МГц
9	7,6 кГц	39,9 кГц	35	69,3 кГц
10	1,9 МГц	22,5 МГц	39	63,5 МГц
11	8,3 кГц	28,5 кГц	32	67,6 кГц
12	1,6 МГц	33,5 МГц	38	69,5 МГц
13	9,7 кГц	35,9 кГц	32	64,6 кГц
14	6,2 МГц	31,5 МГц	36	67,3 МГц
15	4,6 кГц	25,9 кГц	40	64,8 кГц
16	8,1 МГц	37,5 МГц	34	59,6 МГц
17	2,9 кГц	28,8 кГц	31	62,2 кГц
18	6,3 МГц	21,6 МГц	35	67,4 МГц
19	3,4 кГц	34,8 кГц	38	59,6 кГц
20	9,8 МГц	28,8 МГц	37	69,4 МГц
21	6,8 кГц	27,1 кГц	33	59,2 кГц

Варианты задания 1 (указаны согласно номеру студента в журнале)

№ вар.	Границы полосы пропускания		$SNR_{[dB]}$	$B_2^{верх}$
	$B^{ниж}$	$B^{верх}$	дБ	
22	9,3 МГц	35,2 МГц	33	69,3 МГц
23	9,7 кГц	29,4 кГц	32	66,8 кГц
24	0,4 МГц	31,2 МГц	31	61,7 МГц
25	1,6 кГц	39,6 кГц	34	64,4 кГц
26	2,8 МГц	37,4 МГц	36	62,1 МГц
27	0,4 кГц	32,4 кГц	37	65,9 кГц
28	5,8 МГц	25,1 МГц	37	62,6 МГц
29	8,2 кГц	23,3 кГц	32	59,5 кГц
30	4,1 МГц	33,5 МГц	38	62,9 МГц

2. Рассчитать предельную пропускную способность заданного канала вначале по приближенной формуле (1.4), затем по точной формуле (1.3).

3. Определить, каким должно быть отношение сигнал/шум в децибеллах, для того, чтобы пропускная способность канала была равна половине от расчетной.

4. Рассчитать предельную пропускную способность при увеличении верхней границы полосы частот до  $B_2^{верх}$ .

5. Для увеличенной полосы частот определить, каким должно быть отношение сигнал/шум в децибеллах, для того, чтобы пропускная способность канала была равна 125% от вычисленной.

#### 1.4. Контрольные вопросы

1. Теорема Шеннона для канала с шумами.
2. Отношение сигнал/шум.
3. Теорема Шеннона-Хартли.
4. Изменение отношения сигнал/шум при изменении ширины полосы частот.