9. МОДЕЛИ КАНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Точное математическое описание любого реального канала передачи данных обычно весьма сложное [13]. Вместо этого используют упрощенные математические модели, которые позволяют выявить важнейшие закономерности реального канала.

В физическом канале сигнал $S(t)$ подвергается воздействию шума $n(t)$ [39]. Схема этого явления показана на рис. 9.1.

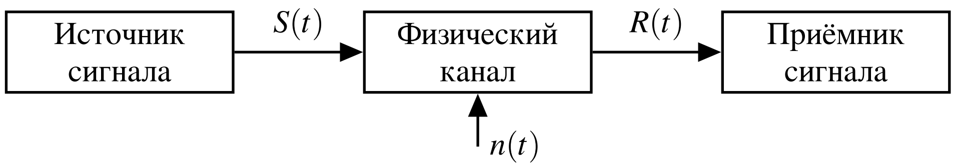

Рис. 9.1. Структурная схема физического канала в общем виде

Для количественной оценки степени влияния шума $n(t)$ на сигнал $S(t)$ обычно используют *отношение сигнал-шум* (SNR), определяемое как отношение мощности сигнала к мощности шума, как показано в формуле

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} = \left(\frac{A_{\text{с}}}{A_{\text{ш}}}\right)^2, \tag{9.1}$$

где P — средняя мощность, а A — среднеквадратичное значение амплитуды. Параметры сигнала и шума измеряются в полосе пропускания системы передачи данных.

Как правило отношение сигнал-шум выражается в децибелах и рассчитывается по формуле

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{A_{\text{с}}}{A_{\text{ш}}}\right). \tag{9.2}$$

В цифровой связи основным критерием качества канала связи и системы передачи данных является *отношение сигнал-шум, нормированное на ширину полосы пропускания и битовую скорость передачи данных*. Нормированное отношение сигнал-шум обозначается как $\frac{E_b}{N_0}$ и рассчитывается по формуле (9.3). E_b — это энергия бита, которая представляет из себя мощность сигнала $P_{\text{с}}$, умноженную на время передачи одного бита T_b. N_0 — это спектральная плотность мощности шума, которая выражается как отношение мощности шума $P_{\text{ш}}$ на ширину полосы пропускания канала W [40]:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_{\text{с}}T_b}{P_{\text{ш}}/W} = \frac{P_{\text{с}}/R}{P_{\text{ш}}/W} = \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\cdot\frac{W}{R} = \mathrm{SNR}\cdot\frac{W}{R}, \tag{9.3}$$

где R — битовая скорость передачи данных.

Выделяют два основных вида моделей каналов передачи данных. Непрерывные (аналоговые) каналы и дискретные (цифровые) каналы.

Непрерывные каналы имеют непрерывный сигнал $S(t)$ на входе и непрерывный сигнал $R(t)$ на выходе. Эти сигналы являются непрерывной функцией от времени.

Дискретные каналы имеют на входе дискретные кодовые символы x_j, а на выходе — дискретные кодовые символы y_i, в общем случае не совпадающие с x_i [41].

Почти во всех реальных линиях связи дискретный канал содержит внутри себя непрерывный канал, на вход которого подаются сигналы $S(t)$, а с выхода снимаются искаженные помехами сигналы $R(t)$ [41]. Свойства этого непрерывного канала наряду с характеристиками модулятора и демодулятора однозначно определяют все параметры дискретного канала. Поэтому иногда дискретный канал называют дискретным отображением непрерывного канала. Однако при математическом исследовании дискретного канала обычно отвлекаются от непрерывного канала и действующих в нем помех и определяют дискретный канал через алфавит источника $\{x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}\}$, вероятности появления символов алфавита, скорость передачи символов, алфавит получателя $\{y_0, y_1, \ldots, y_{Q-1}\}$ и значения переходных вероятностей $P(y_i|x_j)$, где $i = 0,1,\ldots,Q$, $j = 0,1,\ldots,q$ [41, 13].

Переходные вероятности $P(y_i|x_j)$ являются вероятностями того, что при отправке в канал символа x_j на выходе будет получен символ y_i.

Если переходные вероятности для каждой пары i, j остаются постоянными и не зависят от того, какие символы передавались и принимались ранее, то дискретный канал называется постоянным или однородным. Иногда применяют также другие названия: канал без памяти или канал с независимыми ошибками. Если же вероятности перехода зависят от времени или от имевших место ранее переходов, то канал называют неоднородным или каналом с памятью [41].

Также выделяют дискретно-непрерывные каналы, которые имеют дискретный вход и непрерывный выход.

9.1. Параметры моделей каналов ПД

Одним из параметров, использующихся для оценки и сравнения моделей каналов ПД является *вероятность безошибочного участка*, определяемая, как вероятность появления последовательности m (или более) безошибочных бит, за которыми следует бит с ошибкой. Она обозначается как $\mathrm{EFR}(m)$[5] [42] либо как $P(0^m|1)$ [43].

[5] От англ. Error Free Run

По аналогии с вероятностью безошибочного участка вводится и *вероятность пачки ошибок*, определяемая, как вероятность появления последовательности из m (или более) ошибок, за которыми следует безошибочный бит. Обозначается как $P(1^m|0)$ [43].

Важным параметром канала ПД является его *пропускная способность*, т. е. максимальная скорость передачи информации по всем допустимым распределениям вероятностей входных сигналов. Пропускная способность канала обозначается как C [41].

С понятием пропускной способности канала связана основная теорема теории информации — теорема кодирования. Она вперные была сформулирована К. Шенноном [44] и заключается в том, что сообщения всякого дискретного источника могут быть закодированы сигналами канала $x(t)$ и восстановлены по сигналам на выходе канала $y(t)$ с вероятностью ошибки, сколь угодно близкой к нулю, если производительность источника с фиксированной скоростью (либо производительность передающего устройства для источника с управляемой скоростью) $H'(x)$ меньше C. Если же $H'(x) > C$, то такое кодирование невозможно [41].

Для источника с управляемой скоростью эта теорема формулируется иначе: сообщения источника с управляемой скоростью можно закодировать сигналами $x(t)$ и восстановить по сигналам $y(t)$ на выходе канала так, чтобы вероятность ошибки была сколь угодно близка к нулю, а средняя скорость передачи — сколь угодно близка к $\frac{C}{H(x)}$ сообщений в секунду, где $H(x)$ — *энтропия источника* на одно сообщение, т. е. средняя собственная информация на символ источника [41, 45].

9.2. Двоичный симметричный канал

Модель двоичного симметричного канала[6] (ДСК) является самой простой моделью дискретного канала [39]. Модель ДСК соответствует случаю использования двоичной модуляции в канале с аддитивным шумом (в котором выходной сигнал $R(t)$ равен сумме входного сигнала $S(t)$ и шума $n(t)$) и жёсткого решения демодулятора. Таким образом, модель ДСК является дискретной двоичной моделью передачи информации по каналу с абсолютно белым гауссовским шумом (АБГШ), описанному в п. 9.7 [3]. Граф, описывающий модель ДСК, представлен на рис. 9.2.

Входом и выходом данного канала являются наборы $X = \{0,1\}$ и $Y = \{0,1\}$ из двух возможных двоичных символов. Также ДСК характеризуется набором переходных вероятностей $P(Y|X)$, определяющих вероятность приёма из канала символа Y при передаче символа X. Переходные вероятно-

[6] В зарубежной литературе используется англоязычное наименование Binary Symmetric Channel (BSC).

сти для ДСК задаются выражениями [3, 46]

$$\begin{aligned} P(0|0) = P(1|1) = 1 - p_0; \\ P(0|1) = P(1|0) = p_0, \end{aligned} \tag{9.4}$$

где p_0 — вероятность битовой ошибки в канале.

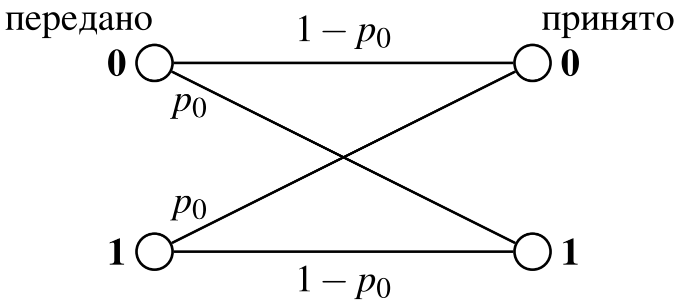

Рис. 9.2. Граф модели двоичного симметричного канала

Для случая использования двух противоположных сигналов $s_0(t) = -s_1(t)$ вероятность битовой ошибки p_0 связана с отношением сигнал-шум выражением [39, 40]

$$p_0 = Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right), \tag{9.5}$$

где $Q(x)$ — функция, определяемая по формуле:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{9.6}$$

Переходные вероятности в канале ДСК не зависят от того, какие символы передавались и принимались ранее, и следовательно канал ДСК является каналом без памяти [13].

Пропускная способность канала ДСК рассчитывается как [13, 47]

$$C_{\text{ДСК}} = 1 + p_0 \log_2 p_0 + (1 - p_0) \log_2 (1 - p_0). \tag{9.7}$$

Из формулы (9.7) видно, что при $p_0 = 0,5$ пропускная способность канала C равна нулю. Этот случай называют обрывом канала [13].

Канал ДСК является частным случаем дикретного канала без памяти (ДКБП) [39]. Канал ДКБП имеет на входе набор $\{x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}\}$ из q символов, а на выходе — набор $\{y_0, y_1, \ldots, y_{Q-1}\}$ из Q символов, и характеризуется набором из $q \cdot Q$ переходных вероятностей $P(y_i|x_j)$, где $i = 0, 1, \ldots, Q$, $j = 0, 1, \ldots, q$. Эти переходные вероятности постоянны во времени, и переходы различных символов независимы.

9.3. Двоичный симметричный канал со стираниями

Двоичный симметричный канал со стираниями[7] (ДСКС) является важным частным случаем канала ДСК. Как и ДСК, двоичный симметричный канал со стираниями может служить упрощённой моделью передачи данных по каналу АБГШ. Граф, описывающий модель канала ДСКС, представлен на рис. 9.3 [48].

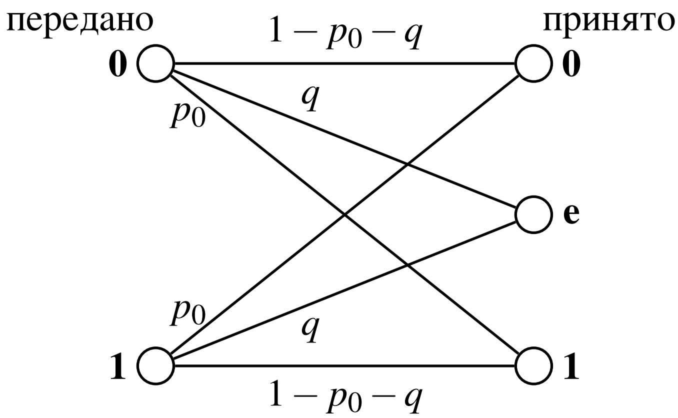

Рис. 9.3. Граф модели двоичного симметричного канала со стираниями

Можно видеть, что по сравнению с моделью ДСК в ДСКС добавляется третье состояние на выходе — «стирание», вероятность которого обозначается q. С точки зрения аналогового канала стирание происходит в случае, когда продетектированный аналоговый сигнал V попадает в зону, в которой значения условных функций плотности распределения вероятностей $f(V/0)$ и $f(V/1)$ оказываются близки к нулю, т. е., когда демодулятор не может надежно опознать переданный символ. Пример подобной ситуации представлен на рис. 9.4 [48].

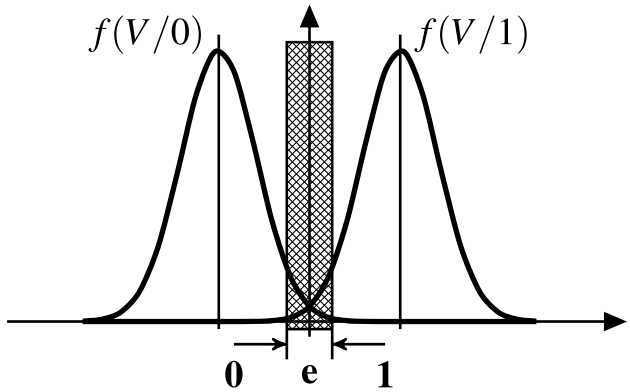

Рис. 9.4. Пример области принятия решений о стирании

[7] В зарубежной литературе используется англоязычное наименование Binary Erasure Channel (BEC).

Матрица переходных вероятностей канала ДСКС равна [48]

$$P_{\text{ДСКС}} = \begin{pmatrix} 1-p_0-q & q & p_0 \\ p_0 & q & 1-p_0-q \end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

Пропускная способность канала ДСКС рассчитывается по формуле (9.9) и зависит только от вероятностей p_0 и q, т. е., является функцией $C_{\text{ДСКС}} = f(p_0, q)$ [48]:

$$C_{\text{ДСКС}} = 1 - q + (1-p_0-q)\log_2 \frac{1-p_0-q}{1-q} + p_0 \log_2 \frac{p_0}{1-q}. \tag{9.9}$$

Важным частным случаем канала ДСКС является канал, содержащий только стирания. В таком канале $p_0 = 0$ — т. е. ошибок либо нет, либо мы ими пренебрегаем. На практике такой канал реализуется оптимальным подбором области стирания, показанной на рис. 9.4. Этот вариант канала ДСКС интересен тем, что он позволяет достичь большей пропускной способности, нежели обычный канал ДСК. Пропускная способность такого канала определяется формулой [48]

$$C_{\text{ДСКС}} = 1 - q. \tag{9.10}$$

Граф такой модели ДСКС показан на рис. 9.5.

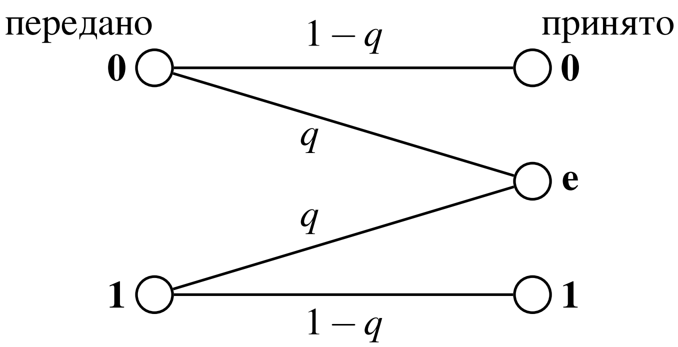

Рис. 9.5. Граф модели двоичного симметричного канала со стираниями для случая $p_0 = 0$

9.4. Двоичный несимметричный канал (Z-канал)

Двоичный несимметричный канал, или Z-канал[8], является каналом без памяти с двоичным входом и двоичным выходом, в котором невозможен переход $0 \longrightarrow 1$. Этот канал получил свое название, благодаря характерному виду своего графа (рис. 9.6) [49, 46]. Поскольку в русскоязычной литературе нет устоявшегося сокращения для канала такого типа, будем использовать англоязычную аббревиатуру ZC.

[8]В зарубежной литературе используется англоязычное наименование Z-Channel (ZC).

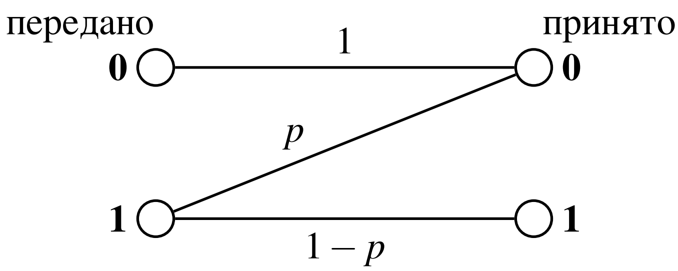

Рис. 9.6. Граф модели двоичного несимметричного канала (Z-канала)

Переходные вероятности для Z-канала задаются выражениями [46]

$$\begin{array}{ll} P(0|0) = 1; & P(0|1) = p; \\ P(1|0) = 0; & P(1|1) = 1 - p; \end{array} \tag{9.11}$$

где p — вероятность ошибки в Z-канале.

Пропускная способность Z-канала рассчитывается по формуле [49]

$$C_{ZC} = \log_2(1 + (1-p)p^{\frac{p}{1-p}}). \tag{9.12}$$

Модель Z-канала используется при рассмотрении оптической и засекреченной связи [50].

9.5. Канал Гилберта–Эллиотта

Канал Гилберта–Эллиотта[9] (GEC) относится к дискретным каналам с памятью, в которых состояние канала зависит от предыдущего состояния [49, 51]. Эта модель предложена в 1963 г. Эллиоттом [52] и является общим случаем модели Гилберта, представленной в 1960 г. [53].

Канал GEC представляет из себя цепь Маркова первого порядка с двумя состояниями — «хорошим» и «плохим», как показано на рис. 9.7.

Каждое из состояний канала можно описать как канал ДСК с соответствующей вероятностью ошибки [49, 54]. В «хорошем» состоянии вероятность битовой ошибки в канале равна p_G, в «плохом» состоянии — p_B. В любой момент времени канал может перейти из одного состояния в другое. При этом вероятности перехода могут быть отличны друг от друга. Вероятность перехода из «хорошего» состояния в «плохое» обозначим как P_{GB}, а вероятность перехода из «плохого» состояния в «хорошее» обозначим как P_{BG}, что отображено на рис. 9.7. Соответствующая этим вероятностям матрица переходов A имеет вид [49]

$$A = \begin{pmatrix} 1 - P_{GB} & P_{GB} \\ P_{BG} & 1 - P_{BG} \end{pmatrix}. \tag{9.13}$$

[9] В зарубежной и переводной литературе используется англоязычное наименование Gilbert–Elliott Channel (GEC).

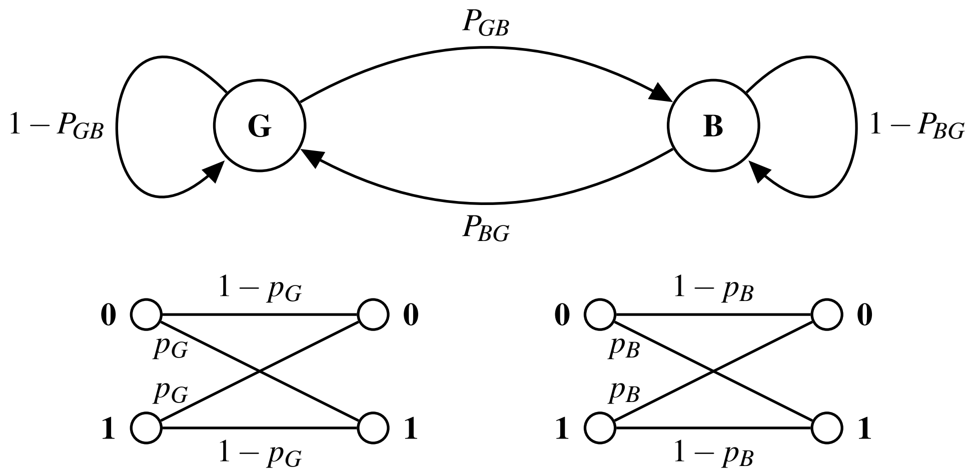

Рис. 9.7. Канал Гилберта–Эллиотта

Из рис. 9.7 следует, что финальные вероятности пребывания канала в состояниях **G** и **B** будут определяться выражениями [51]:

$$\pi_G = \frac{P_{BG}}{P_{GB}+P_{BG}}, \qquad \pi_B = \frac{P_{GB}}{P_{GB}+P_{BG}}. \tag{9.14}$$

Из формул (9.14) следует, что средняя вероятность битовой ошибки в канале может быть вычислена по формуле

$$p_e = p_G \cdot \pi_G + p_B \cdot \pi_B. \tag{9.15}$$

Вероятность того, что в блоке длиной n возникнет m ошибок рассчитывается по формуле

$$P(m,n) = \pi_G \cdot G(m,n) + \pi_B \cdot B(m,n), \tag{9.16}$$

где $G(m,n)$ — вероятность появления m ошибок в блоке длиной n, при условии, что канал во время передачи первого бита находился в состоянии **G**; $B(m,n)$ — вероятность появления m ошибок в блоке длиной n, при условии, что канал во время передачи первого бита находился в состоянии **B**.

Для расчета этих вероятностей Эллиоттом были введены рекуррентные соотношения (9.17), описывающие процесс возникновения ошибок в канале, учитывая, что канал с каждым поступившим новым разрядом может оставаться в прежнем состоянии или переходить в другое [52]:

$$
\begin{aligned}
G(m,n) = \;& G(m,n-1)\cdot(1-P_{GB})\cdot(1-p_G)+\\
&+B(m,n-1)\cdot P_{BG}\cdot(1-p_G)+\\
&+G(m-1,n-1)\cdot(1-P_{GB})\cdot p_G+\\
&+B(m-1,n-1)\cdot P_{BG}\cdot p_G,\\
\\
B(m,n) = \;& G(m,n-1)\cdot P_{GB}\cdot(1-p_B)+\\
&+B(m,n-1)\cdot(1-P_{BG})\cdot(1-p_B)+\\
&+G(m-1,n-1)\cdot P_{GB}\cdot p_B+\\
&+B(m-1,n-1)\cdot(1-P_{BG})\cdot p_B.
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

В формулах (9.18) приведены очевидные начальные значения вероятностей (9.17) при $n = 1$ [52]:

$$
\begin{array}{ll}
G(0,1) = (1-p_G), & B(0,1) = (1-p_B),\\
G(1,1) = p_G, & B(1,1) = p_B.
\end{array}
\tag{9.18}
$$

Также необходимо учитывать, что:

$$
G(m,n) = B(m,n) = 0, \quad \text{при } m < 0 \text{ или } m > n.
$$

Вероятность безошибочного участка (в случае стационарности) для канала GEC рассчитывается по формуле [42]:

$$
\mathrm{EFR}_{GEC}(m) = \pi_G p_G(1-p_G)^m + \pi_B p_B(1-p_B)^m. \tag{9.19}
$$

Канал GEC широко используется для описания источников ошибок в системах передачи данных, а также при анализе эффективности алгоритмов декодирования помехоустойчивых кодов [51].

Существуют исследования, показывающие, что канал GEC близок по своим свойствам к преобразованному в двоичную форму (квантованному) двухлучевому Релеевскому каналу с замираниями без поворота фазы [42].

Часто при использовании модели GEC для двоичного канала полагают, что вероятность $p_B = 0,5$, т. е. «плохое» состояние рассматривается как полный обрыв связи [13]. Это согласуется с представлением о канале, в котором действуют коммутативные помехи.

9.6. Модель канала Поля

В начале 90-х гг. XX века было определено, что для описания распределения ошибок в коммуникационном канале с памятью может быть использована модель Г. Поля, используемая для моделирования распространения заболеваний [55].

Канал Поля является дискретным двоичным аддитивным каналом связи, в котором сигнал на выходе $y_i \in \{0,1\}$ равен сумме по модулю 2 соответствующих ему сигнала на входе $x_i \in \{0,1\}$ и бита ошибки $z_i \in \{0,1\}$: $y_i = x_i \oplus z_i$, для $i = 1,2,3,\ldots$ [55].

Принцип работы канала Поля заключается в следующем. Имеется урна, в которой изначально содержится T шаров, из которых R красных и S черных ($T = R+S$), при этом $\rho = R/T$ и $\sigma = 1-\rho = S/T$. На каждом шаге i из урны вытаскивается случайный шар, так что

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{вытащен красный шар;} \\ 0, & \text{вытащен черный шар.} \end{cases} \tag{9.20}$$

После этого в урну возвращается $1+\Delta$ того же цвета, что и вытащенный. Δ — параметр модели канала (целое число). Как правило, предполагают, что $\Delta > 0$ и $\rho < \sigma$. Дополнительно вводится параметр $\delta = \Delta/T$ [55].

Состоянием канала Поля после n шагов, является количество красных шаров, вытащенных за это время:

$$S_n \triangleq Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = S_{n-1} + Z_n. \tag{9.21}$$

Соответственно, начальное состояние канала: $S_0 = 0$ [55].

Таким образом, состояние канала на шаге n может принимать $n+1$ значение: $\{0,1,\ldots,n\}$, а последовательность состояний $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ формирует марковскую цепь [55]

$$P(S_N = s_n | S_{n-1} = s_{n-1}, S_{n-2} = s_{n-2}, \ldots, S_1 = s_1) = P(S_N = s_n | S_{n-1} = s_{n-1}).$$

Для заданного блока данных на входе $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$ заданного для него блока выходных данных $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ блочная переходная вероятность равна

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{\delta}+d\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{\delta}+n-d\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\delta}+n\right)}, \tag{9.22}$$

где d — расстояние Хэмминга между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; а $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ для $x > 0$ — гамма-функция [42, 55].

Вероятность безошибочного участка (в случае стационарности) для канала Поля рассчитывается по формуле [42]

$$\mathrm{EFR}_{Polya}(m) = \left(\frac{R}{R+S}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{S+(j-1)\Delta}{R+S+j\Delta}\right). \tag{9.23}$$

Нереалистичность канала Поля заключается в его бесконечной памяти — каждый «вытащенный из урны» красный шар, хоть первый, хоть миллионный, приводит к одному и тому же увеличению количества красных шаров [55]. В связи с этим в работе [55] предлагается модель канала Поля с конечной памятью, в которой влияние каждого вытащенного шара ограничено по времени.

Принцип работы канала Поля с конечной памятью заключается в следующем. В урне изначально содержится T шаров, из которых R красных и S черных, так что $T = R + S$. На каждом j-м шаге ($j = 1, 2, \ldots$) из урны вытаскивается шар и затем заменяется набором из $\Delta + 1$ шаров того же цвета ($\Delta > 0$). Через M шагов, на $(j + M)$-м шаге из урны изымаются те Δ шаров, что были добавлены на j-м шаге. Параметры ρ, σ и δ вычисляются аналогично обычному каналу Поля. Влияние вытащенных шаров на канал также описывается формулой (9.20). В итоге, после периода инициализации канала длиной M шагов, общее число шаров в урне фиксируется и становится равным $(T + M\Delta)$ [55].

9.7. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом

Канал с аддитивным белым гауссовским шумом[10] (АБГШ) получается из канала ДКБП при бесконечном уровне квантования выхода детектора ($Q = \infty$) [39]. В этом случае шум является гауссовской случайной величиной с нулевым средним и дисперсией, равной

$$\sigma^2 = \frac{1}{2 \cdot \frac{E_b}{N_0}},$$

где $\frac{E_b}{N_0}$ — нормированное отношение сигнал-шум в канале АБГШ.

Таким образом, канал АБГШ характеризуется дискретным входом $X = \{x_0, \ldots, x_{q-1}\}$, непрерывным выходом $Y = \{-\infty, +\infty\}$ и переходными вероятностями:

$$P(y|x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_j)^2}{2\sigma^2}}, \quad j = 0, 1, \ldots, q-1. \tag{9.24}$$

Для канала АБГШ зависимость вероятности ошибки p_0 от нормированного отношения сигнал-шум $\frac{E_b}{N_0}$ определяется в соответствии с выражением (9.5).

Модель канала АБГШ широко применяется при расчёте и моделировании многих систем радиосвязи, особенно при моделировании каналов спутниковой и дальней космической связи [56].

[10] В зарубежной литературе используется англоязычный термин Additive White Gaussian Noise (AWGN).

Поскольку в помехоустойчивом кодировании работа производится с дискретными данными, при проведении моделирования с использованием канала АБГШ (и других аналоговых каналов) перед передачей закодированных данных в канал необходимо проводить процедуру манипуляции, а после приема данных из канала — обратную процедуру. При работе с двоичными данными часто используется *двоичная фазовая манипуляция*[11] (ФМн-2).

Контрольные вопросы

1. Дайте понятие двоичного-симметричного канала. Как рассчитывается его пропускная способность?
2. Что такое двоичный симметричный канал со стираниями?
3. Опишите модель канала Гилберта–Эллиотта.
4. Что такое канал Поля?

[11] В зарубежной литературе используется англоязычный термин Phase shift keying modulation (PSK).