«Оптимизация и математические методы принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД
Владимиров Сергей Александрович

Лекция 11

Методы теории игр в задачах принятия решений

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Литература:

1. Щекотихин В.М., Терентьев В.М. Прикладная математика.- Орел: Академия ФАПСИ, 2002.
2. Терентьев В.М. Методика обоснования требований к показателям качества АСМКРС. -Л.: ВАС, 1991.
3. Терентьев В.М., Паращук И.Б. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосвязи. - С-Петербург: ВАС, 1995.
4. Таха Х. Введение в исследование операций . В двух книгах .Пер. с англ. М.: Мир 1985 .
5. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, 1981.
6. Петросян Л.А. и др. Теория игр: Учебное пособие.- М.: Высш. Шк., Книжный дом «Университет», 1998.

Введение

Теория, описывающая конфликтные ситуации с количественной стороны, называется *теорией игр*. Интересы между сторонами могут быть полностью противоположными. Такие модели называются *антагонистическими играми*. Но во многих ситуациях в игре могут принимать участие три и более сторон. Такие игры называются *множественными*. Некоторые стороны могут объединяться по интересам. Такие игры называются *коалиционными*.

Игра – модель ситуации, где зафиксированы сами игроки, правила игры, определённые выигрыши после каждого хода, правила окончания игры. В более сложных играх совокупность ходов определяет некоторую *стратегию*. Мы будем рассматривать только парные игры, в которых есть два игрока, и интересы которых полностью противоположны – *антагонистические парные игры*. Если игрок A выиграл a, то игрок B выиграл $-a$ (потерял a). Поэтому такие игры называются так же *играми с нулевой суммой.*

Главным в игровой модели является то, что другая сторона – противник, активно противодействует вам в выборе оптимального решения. При этом меняется само понятие оптимального решения. В дальнейшем мы рассмотрим, что принцип *согласованного оптимума* является основой игры.

Ходы в игре могут быть *чистые* и *случайные*. Чистый ход зависит от сознательного решения стороны, а случайный ход – результат случайного механизма, который иногда применяется специально, а иногда случайно вовлекается в игру. Например, часто азартные игры состоят из одних случайных ходов. *Стратегией игрока* называется совокупность правил, определяющих выбор вариантов действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от сложившейся ситуации. Если количество стратегий конечно – *игра конечная*, в противном случае – *бесконечная игра*.

Задачей теории игр является обоснование выбора оптимальных стратегий обоих игроков. В теории игр считается, что игра повторяется многократно и игроков интересует наибольший средний выигрыш. С учетом интересов игроков, при подходе к выработке оптимального решения приходится применять тот или иной принцип оптимальности.

Схема подготовки и принятия решения в организационных системах. Элементы теории игр.

Основными понятиями теории игр являются:

- множество игроков;
- пространство стратегий игроков;
- множество допустимых исходов (состояний объекта приложения усилий);
- функция выигрыша (потерь) и множество ее значений, которое соответствует принимаемым игроками пошаговым решениям и определяет платежную матрицу и конечную цену игры;
- седловая точка игры, соответствующая компромиссным стратегиям игроков и обеспечивающая равенство нижней и верхней цены игры.

Целью игры является получение каждым игроком чистых либо смешанных стратегий управления, гарантирующих выигрыш (проигрыш) в числовых показателях качества в худших условиях функционирования объекта, т.е цену игры, соответствующую ее седловой точке. Значительный вклад в развитие теории игр внесли Э.Борель, Дж.Фон Нейман, Дж.Нэш, Давыдов, Воробьев и др.

Задача относится к теории игр, если:

- *результат решения задачи зависит от решения двух или более лиц, которые принимают эти решения независимо;*
- *решения ЛПР-учасниками-игроками принимаются в условиях неопределенности.*

Постановка обобщенной задачи:

Пусть имеется два лица (первое и второе) и оба эти лица стремятся получить максимальную выгоду. Следовательно, имеется две целевые функции:

$Q_1(x,y)$ – функция выигрыша первого лица,

$Q_2(x,y)$ – функция выигрыша второго лица,

где x,y – решения, принимаемые соответственно первым и вторым лицом.

Значение целевой функции $Q_1(x,y)$ первого игрока зависит не только от его решения x, которое примет он, но и от решения y, которое примет второй игрок. То же самое можно сказать и о целевой функции $Q_2(x,y)$ второго лица.

Если бы решение у второго игрока было бы точно известно, то для первого игрока выбор оптимального решения x^* был бы традиционным

$$x^* = argmax\ Q_1(x,y`), \quad x \subset X$$

где $y`$– известное решение второго лица, X – множество возможных решений первого лица.

Дополнительно можем ввести новую оценочную функцию $Q`_1(x,y)$, которая позволяет сравнивать какое из решений x_1 или x_2 первого лица "лучше".

Оценивать "превосходство" решения x можно по среднему значению целевой функции Q_1:

$$\bar{Q}_1(x)=\int_{y_н}^{y_в} Q_1(x,y)\,P(y)\,dy.$$

Эта оценка учитывает вклад каждого решения второго лица и вероятность принятия таких решений. Однако, в этом случае необходимо знать вероятность принятия решения вторым лицом или плотность распределения этой вероятности. Если $P(y)$ не известно, то вычислить $Q_1(x)$ невозможно и следует выбрать новую оценку "хорошего " решения.

Естественной оценкой в этом случае является "наихудшее" (минимальное) значение целевой функции $Q_1(x)$:

$$\widetilde{Q}_1(x)=\min_{y\in Y} Q_1(x,y).$$

Такая оценка слишком осторожна: ее называют *гарантированным выигрышем.*

Очевидно, первому игроку хотелось бы выбрать такое x, при котором гарантированный выигрыш $Q_1(x)$ принял бы максимальное значение

$$\widetilde{Q}'_1 = \max_{x \in X} \widetilde{Q}_1(x') = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} Q_1(x, y).$$

Решением игровой задачи является нахождение наилучшей равновесной ситуации. Эта ситуация называется оптимальной.

Классификация игр. Антагонистические и матричные игры.

Классификация игр, используемых в игровых задачах, представлена на рисунке.

По степени временной зависимости множества стратегий игроков и элементов платежной матрицы различают динамические (дифференциальные или многошаговые) и статические игры. По количеству возможных стратегий игры их разделяют на конечные и бесконечные. По количеству имеющейся априорной информации определяют: игру с полной информацией о состоянии игры, о стратегиях действий сторон и о платежной матрице; игру с неполной (вероятностной) информацией о функциях выигрыша, о стратегиях сторон, об осведомленности сторон (каналах наблюдения); игры в условиях полной неопределенности.

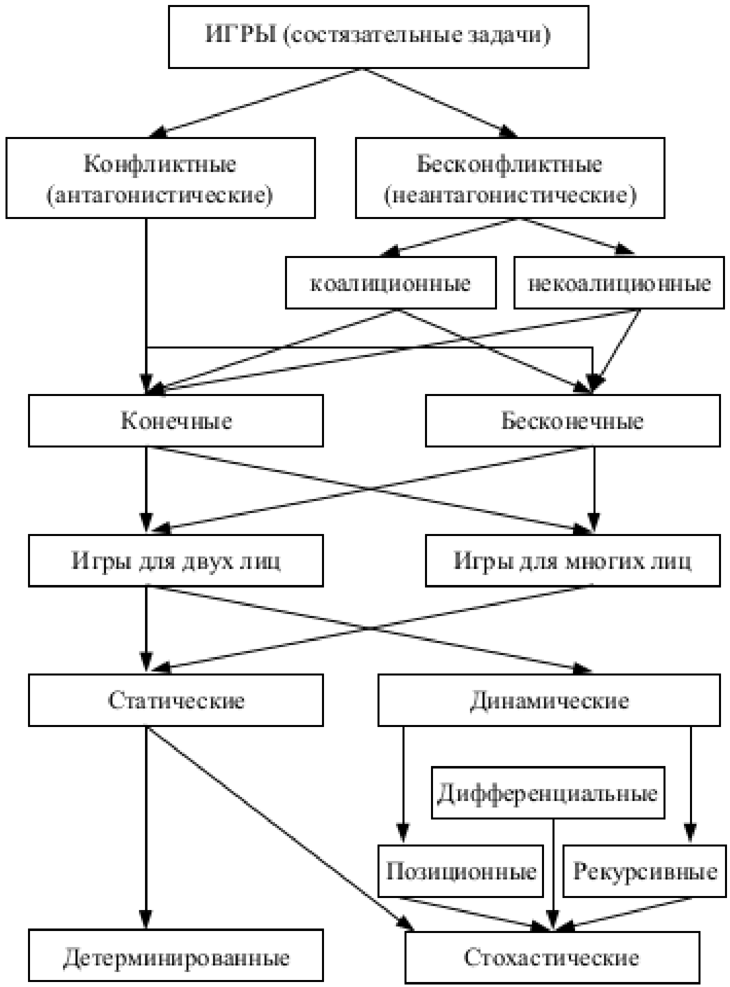

Рис. 1. Классификация игровых задач.

Если в игре участвует два игрока с противоположными интересами (целями) игру называют антагонистической, а если выигрыш одного из них равен проигрышу другого то антагонистической игрой с нулевой суммой. Если ряд игроков объединяются в группы с целью совместного достижения общей цели в игре с другой группой, то игра называется коалиционной. Если процесс игры развертывается во времени с поочередным ходом каждого из игроков, то игра называется позиционной, а принятие решения на каждом ее шаге может быть связано с наличием либо отсутствием информации о предыдущих (будущих) стратегиях игроков, о текущем состоянии объекта и величине дохода. Наконец, антагонистическая одношаговая игра двух игроков с противоположными интересами с известной платежной матрицей называется матричной игрой с нулевой суммой. Так как к данному типу игр в нормальной форме сводятся большинство позиционных игр далее детально рассмотрим постановку и возможные методы решения матричных игр.

Пусть задана матричная игра, в которой первый игрок $X=\{x_i\}$ имеет m возможных стратегий управления, второй игрок $Y=\{y_j\}$ имеет n стратегий, а прямоугольная матрица платежей $G=\{g_{ij}\}$ размерностью $\{n \times m\}$ определяет выигрыши (проигрыши) каждого из игроков при применении ими стратегий x_i и y_j. Целью игры является отыскание первым из игроков стратегии, доставляющей максимум выигрыша g_{ij}, а вторым игроком стратегии соответствующей минимуму проигрыша g_{ij}. В зависимости от первенства принятия решений игроками возможно два сценария игры, определяющие различные значения функции потерь.

Нижней ценой матричной ***игры*** с нулевой суммой – минимальным гарантированным выигрышем первого игрока в наихудших условиях назовем величину выигрыша (потерь), соответствующую случаю, когда вначале ходит второй игрок, формируя вектор размера $\{j\}$ минимальных доходов $\{g_{(j)imin}\}$, элементы которого определены по i-м строкам матрицы $\{g_{ij}\}$, соответствующий его условно оптимальным стратегиям $\{j_{opt}/i\}$, а затем первый игрок, выбирает i_{opt}-ю стратегию, соответствующую максимальному элементу вектора доходов $\{g_{i(j)min}\}$, определяя тем самым наилучшую пессимистичную стратегию:

$$\alpha = \max_i \min_j g_{ij} \quad (1).$$

Верхней ценой игры – максимально возможным выигрышем первого игрока назовем величину выигрыша (потерь), соответствующую обратной последовательности принятия решений, т.е. вначале первый игрок определяет максимальные элементы j-х столбцов матрицы доходов $\{g_{ij}\}$, формируя тем самым вектор доходов $\{g_{(i)j\ max}\}$, соответствующий условно оптимальным стратегиям первого игрока $\{i_{opt}/j\}$, а затем второй игрок определяет стратегию j_{opt}, соответствующую минимальному проигрышу в этом векторе доходов и определяющую безусловную оптимистичную j-ю стратегию второго игрока:

$$\beta = \min_j \max_i g_{ij}. \quad (2)$$

Нижняя и верхняя цены игры связаны соотношением:

$$\alpha \le \beta. \qquad (3)$$

В случае строгого равенства в выражении (3) говорят о наличии седловой точки g_{i0j0} в матрице G, а соответствующие ей стратегии x_{i0} и y_{j0} называют оптимальными (компромиссными) решениями игры в чистых стратегиях.

В случае $\alpha < \beta$ матрица G не имеет седловой точки (стабильной игры) в чистых стратегиях и необходимо переходить к ее поиску в смешанных стратегиях. Смешанной стратегией первого игрока называется вектор $p = \{p_1, \ldots, p_n\}$,

где p_i – вероятность применения чистой стратегии x_i, удовлетворяющая условиям $0 \le p_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Аналогично смешанная стратегия второго игрока представляет собой вектор $\vec{q} = \{q_1, \ldots, q_m\}$, где q_j представляет собой вероятность применения вторым игроком чистой стратегии y_j. Цена игры должна теперь определяться математическим ожиданием выборочных значений выигрыша (проигрыша) игроков с учетом вероятностей появления различных стратегий игроков за период игры:

$$Z(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i q_j g_{ij}. \quad (4)$$

Игры с чистыми и смешанными стратегиями.

Основная теорема теории игр:

«Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно в области смешанных стратегий. Цена игры заключена в пределах $\alpha \leq G \leq \beta$ ». Тогда, согласно теореме Нэша [1,3] игра в смешанных стратегиях всегда имеет седловую точку (равенство нижней и верхней цен игры), а соответствующая ей цена игры γ в смешанных стратегиях имеет вид:

$$\gamma(p^{opt}, q^{opt}) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} Z(\vec{p}, \vec{q}) = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} Z(\vec{p}, \vec{q}). \quad (5)$$

Для поиска нижней цены игры (средний член выражения (5) *второй* игрок определяет вектор *чистых* стратегий $\{y_i\}$, $i=1,\ldots,n$, доставляющий минимум выигрыша по всем i-м строкам матрицы доходов $\{g_{i\min}\}$, а далее ищется вектор вероятностей применения стратегий (смешанная стратегия) *первого* игрока { p_i^{opt} }, максимизирующих его выигрыш $Z(\vec{y}, \vec{p}^{opt}) = \max_{\vec{p}} \sum_{i=1}^{n} g_{i\min} p_i \leq \gamma$, с учетом ограничений.

Поиск верхней цены игры включает выбор первым игроком вектора *чистых* стратегий $\{x_j\}$, $j=1,\ldots,m$, соответствующего максимальным элементам j-х столбцов матрицы доходов $\{g_{j\max}\}$, и последующий поиск значений компонент вектора $\vec{q}^{opt} = \{q_j^{opt}\}$, минимизирующего доход первого игрока. Полученное при этом значение выигрыша оказывается равным $Z(\vec{q}^{opt}, \vec{x}) = \min_{\vec{q}} \sum_{j=1}^{m} g_{j\max} q_j \geq \gamma$.

Для случая равенства нижней и верхней цен игры получаем оптимальные или компромиссные решения в смешанных стратегиях, физический смысл которых заключается в соблюдении игроками оптимальных значений вероятностей появления имеющихся в их распоряжении чистых стратегий на всем периоде игры. Отклонение от найденных компромиссных стратегий ведет к проигрышу отклонившегося игрока.

Так как решение игры в смешанных стратегиях является общим случаем по сравнению с игрой в чистых стратегиях, то далее рассмотрим методы решения игровых задач для общего случая.

1. Применение симплекс – метода в задачах поиска компромиссных стратегий.

В соответствие с введенным понятием цены игры в седловой точке $z(\vec{p}^{opt}, \vec{q}^{opt}) = \gamma(\vec{p}^{opt}, \vec{q}^{opt}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i^{opt} q_j^{opt} g_{ij}.$ и записи его для случая применения произвольных стратегий со стороны одного из игроков можно записать:

$$Z_j(y_i, \vec{p}^{opt}) = \sum_{i=1}^{n} g_{i(j)} p_i \geq \gamma, \qquad (6)$$
$$Z_i(x_j, \vec{q}^{opt}) = \sum_{j=1}^{m} g_{(i)j} q_j \leq \gamma.$$

где учтено, что при применении вторым игроком произвольной чистой стратегии j (т. е. при отклонении его поведения относительно оптимальной вероятностной стратегии, соответствующей седловой точке) первый игрок, придерживающийся оптимальной стратегии $\vec{p}^{opt}$, достигает в игре результат, превосходящий γ и наоборот (6) .

Одновременно, учитывая условие нормирования для искомых векторов вероятностей стратегий первого и второго игроков

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \qquad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1, \tag{7}$$

и с учетом масштабирования выражений (6, 7) на величину γ, получим две (прямую и двойственную) задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i' = \frac{1}{\gamma} = U \Rightarrow \min_{\vec{p}}, \\ &\sum_{i=1}^{n} g_{ij} p_i' \geq 1; \\ &\sum_{j=1}^{m} q_j' = \frac{1}{\gamma} = W \Rightarrow \max_{\vec{q}}, \\ &\sum_{j=1}^{m} g_{ij} q_j' \leq 1, \end{aligned} \tag{8}$$

где p_i', q_j' - нормированные на величину γ вероятности использования стратегий игроков.

Выбор цели оптимизации переменных в прямой и двойственной задачах (8) определяется стремлением к равенству в ограничениях для них.

Решение данных задач ЛП могут быть найдены обычным симплекс – методом, а пересчет найденных оптимальных векторов в значения вероятностей появления стратегий игроков осуществляется следующим образом:

$$\gamma=\frac{1}{W}=\frac{1}{V};\, p_i=p_i^{'}\cdot\gamma;\, q_j=q_j^{'}\cdot\gamma.$$

Обычно начинают решение той задачи из двух, для которой меньше число ограничений (проще многоугольник решений).

2. Итерационный метод решения игровой задачи

Итерационный метод включает в себя следующие этапы:

а) выбор произвольной стратегии первого игрока x_i в первой партии;

б) выбор стратегии второго игрока y_j, при которой первый игрок получает минимальный выигрыш *min* g_{ij};

в) стратегия y_j принимается активной для второго игрока, для него определяются потери при любой стратегии первого игрока и определяется та из них $x_i^{'}$, которая доставляет максимум выигрыша *max* g_{ij};

г) стратегию x_i' принимают в качестве активной для первого игрока и отыскивается та из стратегий второго игрока y_j', которая обеспечивает минимум суммарного за два шага выигрыша первого игрока.

Далее розыгрыш продолжается до момента совпадения суммарного выигрыша и проигрыша за все шаги игры либо до момента когда их разность станет меньше некоторой наперед заданной величины $(\beta_\Sigma - \alpha_\Sigma) \leq \varepsilon$.

Вероятности применения тех либо других стратегий игроков в ходе всей партии принимаются в качестве векторов вероятностей стратегий первого и второго игроков, а число возможных итераций может достигать величин порядка сотен и тысяч шагов.

Пример.

Задача №1. Отыскание пессимистической стратегии выбора для корреспондента частоты передачи в сети оповещения в условиях радиоподавления.

В целях повышения надежности передачи циркулярных сообщений с заданным качеством в радиосети выделяется группа частот $\{f_1,\ldots,f_i,\ldots,f_N\}$. На каждой из частот известно значение отношения сигнал/помеха для j-го корреспондента сети h_{ij}, определяемое воздействием преднамеренной помехи на данной частоте. Задача заключается в выборе из заданной группы частот той из них, для которой отношение сигнал/помеха у корреспондента радиосети, находящегося в наихудших по помехе условиях, окажется наибольшим. Решим задачу методом прямого перебора в терминах матричной игры.

Пусть матрица доходов (потерь) – отношений сигнал/помеха $\{h_{ij}\}$ на i-х частотах у j-х корреспондентов в радиосети передачи циркулярных сообщений имеет вид

	Кор.1	Кор.2	Кор.3	Кор.4	max min h_{ij}	min max h_{ij}
F_1	5	10	18	25		25
F_2	8	7	28	23		
F_3	21	18	12	20		
F_4	30	22	19	15	15	
F_5	3	40	10	7		
F_6	50	5	15	22		

В соответствии с целью решаемой задачи и алгоритмом поиска чистых стратегий игры находим максиминные стратегии i и j, для чего вначале на каждой i –й частоте определяем минимальные j-е элементы матрицы доходов $\{h_{i(j)min}\}$, а затем выбором максимального из них получаем искомые оптимальные стратегии $i_{opt}=4$ и $j_{opt}=4$ (осуществлять передачу циркулярных сообщений в радиосети на частоте f_4 и ставить помеху в направлении корреспондента №4), а также соответствующее им гарантированное в условиях наихудших помех значение отношения сигнал/помеха $h_{i0,j0ниж}=15$, являющееся нижней цены игры.

Наряду с пессимистичным вариантом игры представляет интерес поиск оптимистичного (минимаксного) варианта, соответствующего верхней цене игры. Поэтому для каждой j-й стратегии подавления определяем максимальные по i элементы столбцов матрицы доходов, а затем из полученного вектора максимальных доходов $h_{(i)jmax}$ ищем j-й элемент, соответствующий минимальному значению отношения сигнал/помеха, а следовательно определяющий оптимистичные стратегии игры. Ими являются стратегии $i=1$ и $j=4$ (использовать для передачи частоту f_1 и подавлять корреспондента №4), а верхняя цена игры оказывается при этом равной $h_{i0j0верх}=25$.

Как следует из сравнения нижней и верхней цены игры в ней отсутствует седловая точка, т.е. нет решения в чистых стратегиях.

Пример.

Задача №2. Пример использования итерационного метода в задаче поиска смешанных стратегий для сигнала ППРЧ в условиях радиоподавления.

Пусть задано множество возможных частот, используемых для случайных скачков рабочей частоты сигнала с ППРЧ и являющихся - стратегиями игрока $\{A_i\}$, и варианты их подавления узкополосной помехой противника $\{B_j\}$, а также соответствующая им платежная матрица $\{C_{ij}[мбит/с]\}$ с элементами, равными пропускной способности направления связи при работе на i-й рабочей частоте в условиях j-го варианта подавления.

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	4	2
A_2	7	3	4
A_3	6	6	0

Необходимо определить компромиссные стратегии участников игры (закон прыганья по частотам сигнала в линии связи и закон изменения частоты помехи со стороны противника), удовлетворяющие седловой точке игры. В таблице №1 представлены результаты пошагового решения игры итерационным алгоритмом.

Таблица№1.

Номер партии	Выбор стратегии	Суммарный выигрыш C_j			Ниж. цена игры	Выбор стратегии	Суммарный выигрыш C_i			Верх. цена игры	$\beta - \alpha = \varepsilon$
	A_i	B_1	B_2	B_3	α	B_i	A_1	A_2	A_3	β	
1	A_2	7	3	4	3	B_2	4	3	6	6	3
2	A_3	13	9	4	4/2	B_3	6	7	6	7/2	3/2
3	A_2	20	12	8	8/3	B_3	8	11	6	11/3	3/3

4	A_2	27	15	12	12/4	B_3	10	15	6	15/4	3/4
5	A_2	34	18	16	16/5	B_3	12	19	6	19/5	3/5
6	A_2	41	21	20	20/6	B_3	14	23	6	23/6	3/6
7	A_2	48	24	24	24/7	B_2	18	26	12	26/7	2/7
8	A_2	55	27	28	27/8	B_2	22	29	18	29/8	2/8
9	A_2	62	30	32	30/9	B_2	26	32	24	32/9	2/9
10	A_2	69	33	36	33/10	B_2	30	35	30	35/10	2/10

Решение игры находим статистической обработкой результатов игры:

1. Цена игры: $v = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{33/10 + 35/10}{2} = 3{,}4$ *[мбит/с]*.
2. Вероятности применения стратегий: $p_i = \frac{k}{n}$, где k-число применений i-й стратегии; n- общее число шагов игры.
3. Окончательно имеем:
   компромиссные стратегии игроков $P_A = [0;0{,}9;0{,}1]$; $P_B = [0;0{,}5;0{,}5]$.

Таким образом, для получения гарантированной пропускной способности линии связи $C_{компр.}$*=3,4мбит/с*, использующей сигналы с ППРЧ в условиях радиоподавления на отдельных частотах, необходимо организовать режимы смены рабочих частот в линии (работать девять десятых длительности сеанса связи на частоте f_2, одну десятую времени - на частоте f_3 и частоту f_1 - не использовать) и режимы смены частоты постановки помех (ставить помеху на частотах f_2 и f_3 в равных временных пропорциях, а подавление частоты f_1 не применять) в соответствии с компромиссными стратегиями. Отклонение от указанных стратегий одной из сторон приведет только к выигрышу противоположной стороны, поэтому полученная цена игры является гарантированной.

Заключение.

Класс задач оптимизации решений, характеризующихся наличием антагонизма сторон, априорной неопределенности относительно конкретных пошаговых внешних воздействий на объект (из множества возможных) с целью снижения качества его функционирования, а также набором собственных стратегий управления объектом, принимаемых с целью компенсации наносимого ущерба, относится к классу задач, решаемых методами теории игр [1,6,7].

Рассмотренные методы теории игр позволяют проводить оптимизацию решений в условиях, когда методы экстремального управления оказываются малоэффективными, например, в случае большой инерционности контура управления объекта по сравнению с динамикой изменения стратегий противника. Полученные на основе игрового подхода компромиссные стратегии игроков обеспечивают гарантированный выигрыш (проигрыш) в значении показателей качества функционирования объекта в худших условиях его функционирования. При этом инерционность и затраты ресурсов на реализацию смешанных стратегий оказываются несравненно ниже, чем для экстремальных систем управления, что может быть определяющим при выборе способа построения системы управления.