# «Оптимизация и математические методы принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД
Владимиров Сергей Александрович

***Лекция 10***

# Методы векторной динамической оптимизации

С О Д Е Р Ж А Н И Е

## Литература:


1. Щекотихин В.М., Терентьев В.М. Прикладная математика.- Орел: Академия ФАПСИ, 2002.
2. Терентьев В.М. Методика обоснования требований к показателям качества АСМКРС. -Л.: ВАС, 1991.
3. Терентьев В.М., Паращук И.Б. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосвязи. - С-Петербург: ВАС, 1995.
4. Терентьев В.М., Санин Ю.В. Анализ эффективности функционирования автоматизированных сетей многоканальной радиосвязи. - С-Петербург: ВАС, 1992.
5. Терентьев В. М., Илюхин А. А., Куцакин А. И., Осипов А. Н. Основы построения сетей спутниковой связи с подвижными объектами: Учебное пособие. – Орел: Академия Спецсвязи России, 2004.

## Введение

Рассматривая особенности теории принятия решений с точки зрения стохастического оптимального управления можно сказать, что к ним относятся:

- использование для описания объектов методов теории переменных состояния;
- использование среднеквадратичных целевых функций, записанных в рекуррентной форме;
- фундаментальная роль принципа разделения;
- построение алгоритмов стохастического оценивания состояния объекта на основе фильтров Калмана;
- использование известных детерминированных методов при принятии управленческих решений (отыскании управляющих воздействий).

## *Проблемы векторной оптимизации процесса принятия решений.*

Формализованная цель задачи - критерий оптимальности $I_n = min\ L(Y, Y_{mp})$ - формулируется на основе целевой функции $L(Y, Y_{mp})$, включающей в себя систему показателей и требования к их значениям, а также указания по поиску их экстремумов *(min, max, minmax, maxmin* и др.).

В практических задачах, как нами рассматривалось ранее, используются следующие основные виды целевых функций:

-простая $L=(Y-Y_{mp})$ ;

-модульная $L=|Y-Y_{mp}|$ ;

-квадратичная $L=[Y-Y_{mp}]^2$ .

Наличие множества различных и зачастую противоречивых критериев оптимальности порождает проблему многокритериальной (векторной) оптимизации процесса выбора решения. Основными операциями на пути ее решения являются необходимость сокращения размерности векторного критерия оптимальности (ВКО), нормализация и последующая скаляризация (свертка) его составляющих.

***Редукция системы критериев оптимальности.***

Уменьшение размерности системы показателей (критериев оптимальности) значительно упрощает решение задачи ВКО. Одним из наиболее распространенных методов редукции является метод, основанный на оценке степени линейной независимости отдельных составляющих векторного критерия.

Вычисление матрицы коэффициентов корреляции ВКО проводится на основе следующего выражения [1,3]:

$$M\rho \ \{\rho_{nn'}\} ;$$

$$\rho_{nn'}=\frac{K(I_n,I_{n'})}{\sigma(I_n)\sigma(I_{n'})}=\frac{\sum_{l=1}^{M}\sum_{l'=1}^{M}[I_{nl}-\bar{I}_n][I_{n'l'}-\bar{I}_{n'}]P_{ll'}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{M}[I_{nl}-\bar{I}_n]^2P_{nl}\sum_{l'=1}^{M}[I_{n'l'}-\bar{I}_{n'}]^2P_{n'l'}}}, \qquad (1)$$

где $K(I_n, I_{n'}) = M[I_n, I_{n'}]$ – матричная взаимная корреляционная функция *n*-го и $n'$-го критериев диагональные члены которой являются дисперсиями *n*-х критериев, а остальные члены характеризуют степень линейной независимости любой пары критериев;

$n, n'$ - номера критериев оптимальности;

$l = 1, \ldots, M$ - номера дискретных значений критериев;

$\bar{I}_n = \sum_{l=1}^{\infty} I_n P_{nl}$ – среднее значение критерия;

$P_{nl}, P_{n'l'}$ – вероятности принятия $n$ ($n'$)-м критерием значения $l$;

$P_{ll'}$ – совместная вероятность принятия *n*-м критерием $l$ -го значения и $n'$– м критерием $l'$– го значения.

Редукция системы критериев осуществляется путем удаления из исходной задачи тех критериев $I_{n'}$, которым в матрице коэффициентов корреляции $\{\rho_{nn'}\}$ соответствуют такие недиагональные элементы, которые превышают величину 0,9 и выше. Следует отметить, что критерии оптимальности в исходной задаче должны быть предварительно ранжированы по степени их важности для принятия решения. Для случая непрерывных критериев вероятности в выражении (1) должны быть заменены на плотности распределения, а суммы на интегралы.

***Нормирование составляющих векторного критерия.***

Процесс нормирования включает этапы перехода к единой размерности или безразмерности, сведения разных составляющих к одной точке отсчета и переход к равноценным шкалам (одному масштабу). Достаточно полно все перечисленные этапы могут быть выполнены при использовании следующего линейного преобразования:

$$I_n^{(н)}(\vec{x};k)=c_n I_n(\vec{x};k)-d_n, \quad (2).$$

где $c_n=\dfrac{1}{\left(I_n^{'}(\vec{x};k)-I_n^{0}(\vec{x};k)\right)}-$ масштабный коэффициент;

$d_n=\dfrac{I_n^{0}(\vec{x};k)}{\left(I_n^{'}(\vec{x};k)-I_n^{0}(\vec{x};k)\right)}-$ коэффициент сдвига, корректирующий начало отсчета;

$I_n^{(н)}, I_n^{'}, I_n^{0}-$ нормированное, наибольшее и наименьшее значения критериев. Использование преобразования (2) позволяет привести все критерии к нулевой точке отсчета, их изменение ограничивается отрезком $[0,1]$, а также делает все критерии безразмерными. Для изменения цели в критерии с *max* на *min* необходимо заменить в выражении (2) знаки при коэффициентах $c_n$ и $d_n$ на обратные.

***Скаляризация (свертка) векторного критерия оптимальности.***

Задача оптимизации по векторному критерию состоит в отыскании решений, удовлетворяющих экстремуму одновременно всех составляющих ВКО. Существует два основных пути решения данной задачи: поиск компромиссных решений, оптимальных по Парето и поиск решений, оптимальных в смысле обобщенного скалярного критерия, полученного путем свертки (скаляризации) всех компонент ВКО. Первый путь связан с трудностями использования строгих математических методов оптимизации для широкого круга задач, а также отсутствием, как правило, единственности искомого решения [2,3]. В связи с этим этап поиска компромиссных решений имеет вспомогательное значение и используется лишь для предварительного уменьшения размерности исходного множества решений до этапа свертки ВКО.

Суть второго метода заключается в сведении векторной задачи оптимизации к скалярной. При этом формируется обобщенный критерий, значение которого для различных вариантов управления является проекцией всех составляющих ВКО на одну числовую ось, что значительно облегчает окончательный выбор оптимального решения, так как существует множество конструктивных скалярных методов оптимизации.

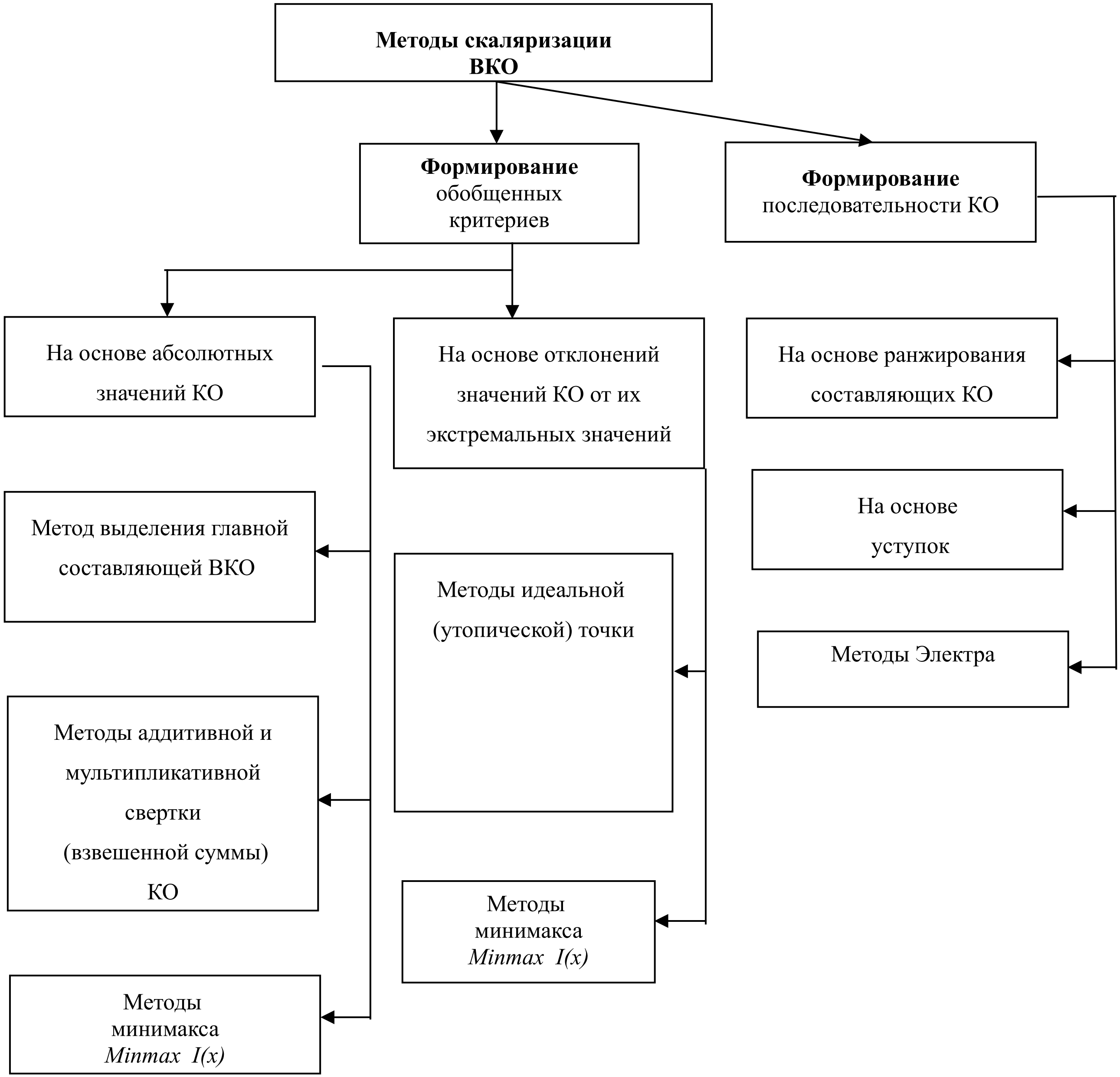



Рис. 2. Методы скаляризации векторных критериев оптимальности

К основным методам свертки ВКО (см. рис.2.) относятся: методы, основанные на последовательной оптимизации по частным критериям (метод ведущей составляющей, оптимизация по ранжированной последовательности критериев, метод последовательных уступок, методы «Электра-1»); методы, основанные на получении обобщенных скалярных критериев (метод аддитивной свертки составляющих ВКО с весовыми коэффициентами, метод идеальной (утопической) точки, метод вероятностной свертки).

Особенностями первой группы методов является последовательный (по всем компонентам ВКО) характер решения задачи оптимизации, что приводит к возможности потери компромиссно-оптимального решения уже на первых шагах оптимизации.

**Метод главного критерия.** Здесь сначала выбирают главный критерий и объявляют его единственным. Все остальные критерии становятся управляемыми переменными, на которые накладываются ограничения, чтобы они были не хуже заданной величины. Обычная задача ЛП с ограничениями.

$$max\,F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{array}$$

Основным недостатком **метода взвешенной суммы** является субъективный характер выбора весовых коэффициентов определяющих важность различных компонент ВКО и общая, как следствие, субъективность получаемых решений.

Свободным от большинства указанных недостатков является **метод идеальной точки**, в котором формирование обобщенного критерия оптимальности осуществляется согласно выражению:

$$I^{обобщ.}(\vec{x})=\left[\sum_{n=1}^{N}\left(I_n^{(н)}(\vec{x})-I_n^{(н)идеал.}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}, \quad (3)$$

где $q = 1,2,\ldots$- степень целевой функции;

$\vec{x}-$ вектор, оптимизируемых по ВКО параметров.

Следует отметить, что в качестве идеальных значений критериев $I_n^{идеал.}$ могут выступать либо экстремальные значения *n-х* критериев, либо требования к их значениям со стороны пользователей ТКС.

Для случая стохастических систем в выражении (3) выборочные значения критериев должны быть заменены на их средние значения - $\overline{\vec{I}} = M\{\vec{I}\}$.
Здесь *M{ . }*- знак математического ожидания.
Кроме того, при наличии косвенных наблюдений за состоянием ТКС эти средние становятся условными по их выборочным значениям:

$$\overline{I}^{обобщ.}(\vec{x}) = M\left\{\left[\sum_{n=1}^{N}\left(I_n^{(н)}(\vec{x}) - I_n^{(н)идеал.}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} / z(\vec{x})\right\}, \quad (4)$$

где $\overline{I}^{обобщ.}(\vec{x})$– среднее значение обобщенного критерия условное по наблюдениям $z(\vec{x})$.

**Метод последовательных уступок.** Проранжируем все критерии и расположим их в порядке убывающей важности: $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_L$

Пусть все критерии нужно максимизировать. Сначала отбросим все критерии, кроме $K_1$, и найдем допустимое решение, обращающее в максимум $K_1$. Как правило, при этом другие критерии не получают своих наилучших значений. Поэтому исходя из практических соображений и точности исходных данных, назначается уступка $K_1$, которую мы согласны допустить, для того чтобы обратить в максимум $K_2$. Наложим на критерий $K_1$ ограничение, чтобы он был не меньше, чем $K_{1\ max}$ - $\Delta K_1$ ( $K_{1\ max}$ — максимально возможное значение $K_1$), и при этом ограничении ищем решение, обращающее в максимум $K_2$. Далее снова назначается уступка в показателе $K_2$, ценой которой находится максимум $K_3$ и т.д.

Такой способ хорош тем, что здесь сразу видно, ценой какой «уступки» в одном показателе приобретается выигрыш в другом. Заметим, что иногда даже при малом $\Delta K_{i-1}$ «свобода» выбора позволяет достичь существенной оптимизации $K_i$. Это зависит от вида границы критериального пространства. Очевидно, успех такого метода зависит от того, насколько «тупой» максимум. Процедура может быть повторена для других $K_i$.

**Методы ЭЛЕКТРА**, предложенные профессором Б. Руа (Франция). В этих методах отношения предпочтения полученных на множестве Парето альтернатив строятся следующим образом.

Для каждого из $m$ критериев (предполагается, что все критерии числовые) определяется вес – положительное число, характеризующее его важность. Например, при назначении весов критериям выбора автомобиля: цена (критерий 1), важнее комфортности (критерий 2), а та, в свою очередь, важнее, чем скоростные качества (критерий 3) и внешний вид автомобиля (критерий 4). Кроме того, критерии 3 и 4 имеют одинаковую важность, а, рассматриваемые совместно, имеют большую важность, чем критерий 1, т.е.:

$$w_1 > w_2 > w_3 = w_4 , \; w_3 + w_4 > w_1.$$

Назначим весовые коэффициенты: $w_1 = 5; \; w_2 = 4; \; w_3 = w_4 = 3.$

Выполним нормирование весовых коэффициентов:

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}, \quad i=1,\ldots,m; \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 .$$

Для определения, превосходит ли альтернатива $A_k$ альтернативу $A_l$, необходимо:

1) Разбить множество критериев на три подмножества:

- критерии, по которым $A_k$ превосходит $A_l$;
- критерии, по которым $A_k$ и $A_l$ имеют одинаковые оценки;
- критерии, по которым $A_l$ превосходит $A_k$.

2) Определить относительную важность каждого из этих подмножеств $W_{kl}^{+}$, $W_{kl}^{=}$, $W_{kl}^{-}$ как сумму весов входящих в них критериев и считать, что вариант $A_k$ превосходит $A_l$ если, выполняется условие: $\dfrac{W_{kl}^{+}}{\sum_{i=1}^{m} w_i} > \dfrac{W_{kl}^{-}}{\sum_{i=1}^{m} w_i}$

Это условие является необходимым, но не достаточным условием превосходства $A_k$ над $A_l$. Некоторые методы ЭЛЕКТРА формулируют и дополнительные условия оптимизации, которые учитывают не только оценки $A_k$ и $A_l$ по критериям, но и значения разностей этих оценок.

### *Отыскание парето-оптимальных решений.*

**Определение.** Множество безусловно несравнимых альтернатив, оставшихся после отбрасывания всех безусловно худших альтернатив, называется множеством Парето. Парето оптимальное множество еще называют областью компромиссов. Ясно, что множество Парето можно получить в результате анализа критериального пространства.

Таким образом, векторная оптимизация включает два этапа:

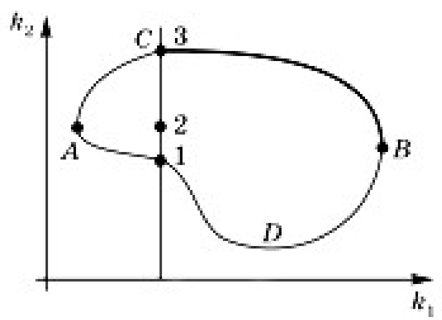
1. Безусловная оптимизация. Здесь анализируется критериальное пространство, отсеиваются безусловно худшие варианты и получают множество Парето.

2. Условная оптимизация. Так как множество Парето, как правило, состоит из более чем одной точки, то для получения единственного решения необходимо применить дополнительные принципы оптимальности (условия согласования критериев).

## Этап безусловной оптимизации.

### *Определение множества Парето*

### Непрерывный случай.




Если целевая функция векторная $X \in R \Rightarrow \bar{K} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – множество точек, в котором небольшое улучшение $X$ влечёт за собой небольшое изменение $K$. И критериальное пространство — это область с внутренними точками и границей (не обязательно замкнутая). Пусть есть два показателя $(K_1, K_2)$. При этом по условию оптимальности $K_1$ и $K_2$ максимизируются каждый по своему критерию.

Рассмотрим область возможных значений критериев см.рисунок. Точки, лежащие на одной вертикали или на одной горизонтали, всегда, безусловно, сравнимы (точки 1, 2, 3). Получается, что все внутренние точки можно отсеять. Дуга *AB* состоит из лучших точек по критерию $K_2$ при постоянном $K_1$. Но часть точек дуги *AB*, а именно точки дуги *AC* можно отбросить, так как они хуже точек на дуге *CB*. Поэтому точками множества Парето будут точки, находящиеся на дуге *CB*. При анализе характерными являются точки касания вертикалей и горизонталей к области критериев (точки *A, B, C, D*).

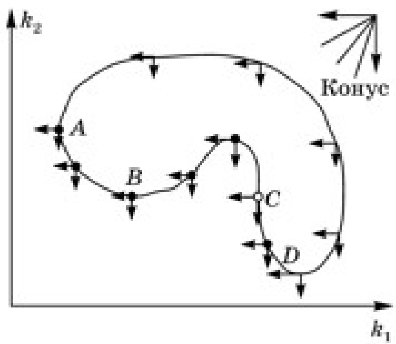
Существует несколько алгоритмов нахождения множества Парето. Они зависят от того, в каком виде задано множество вариантов критериев. В практических задачах сначала приходится получать само множество критериев, затем множество Парето в критериальном пространстве и только затем можно определить Парето-оптимальное множество в области допустимых решений X.

Существуют два основных метода нахождения множества Парето:

1) **Метод обхода конусом** применяется для непрерывной области критериев.

   Назовем конусом пространственный угол, образуемый лучами, идущими из общей вершины и ограниченными в каждой плоскости углом 90°. Направление ограничивающих лучей соответствует направлению оптимизации критериев.

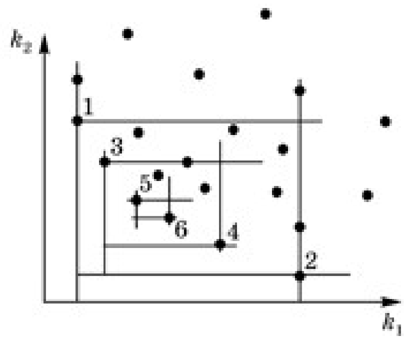
   Для получения множества Парето достаточно установить вершину конуса на все точки границы области критериев, если при этом ни один луч не пересекает область, то вершина лежит в точке Парето, а если пересекает, то нет.




Пример: $\boldsymbol{K_1}$ **=> min**, $\boldsymbol{K_2}$ **=> min** см. рисунок.
Множество Парето: ***[AB] U [CD]***.

**Дискретный случай.**

2) **Метод прямоугольников** применяют, когда критериальное пространство представляет собой отдельные точки или табличные значения. Сформулируем алгоритм для случая двух критериев, когда $\boldsymbol{K_1}$ **=> min**, $\boldsymbol{K_2}$ **=> min**, а критериальное пространство — точки на плоскости.




1. Фиксируем самые левые точки. Если их несколько, выбираем среди них самую нижнюю. Эта точка является точкой Парето, фиксируем ее.
2. Выберем самую нижнюю точку. Если их несколько, то выбираем самую левую. Это точка Парето, фиксируем ее.
3. Через полученные точки проводим вертикаль и горизонталь. Отбрасываем сами точки Парето, точки, лежащие на границе полученного прямоугольника, и точки вне прямоугольника.
4. К внутренним точкам полученного прямоугольника применяем алгоритм из пункта 1.

Алгоритм заканчивается тогда, когда внутри прямоугольника не останется ни одной точки.

**Решение:** множество Парето: **1, 2, 3, 4, 5, 6.**

Изложенный алгоритм легко обобщается на случай большего числа критериев, при других направлениях оптимизации, а также на случай табличного задания критериев.

## Этап условной оптимизации.

После нахождения множества Парето, если количество точек в нём $\geqslant 2$, встаёт вопрос о выборе единственной точки, которую необходимо выбрать в качестве оптимальной. Так как точки на множестве Парето отбираются так, что каждая из них лучше по одному критерию, но хуже по другому, то совместное улучшение по двум критериям невозможно. Условная оптимизация предполагает введение условия согласованности в компонентах критерия.

Все это подробно рассмотрено выше в проблемах и задачах векторного многокритериального отбора.

### *Принцип разделения в задаче стохастического оптимального управления.*

Сведение векторной задачи оптимизации к скалярной, выполняемой по обобщенному критерию (4), делает целесообразным рассмотрение общего подхода к решению задач скалярной динамической оптимизации [1,2,3](лекция 7). Для линейных стохастических процессов, описываемых уравнениями состояния и наблюдения вида:

$$\vec{x}(k)=A(k)\vec{x}(k-1)+B(k)\vec{u}(k)+\vec{v}(k),$$
$$\vec{z}(k)=H(k)\vec{x}(k)+\vec{w}(k), \qquad (5)$$

а также при квадратичном критерии оптимальности типа:

$$I^{обобщ}=\min_{\vec{u}\in U} M\left\{[\vec{x}^T(K)\rho\vec{x}(K)+\sum_{k=1}^{K-1}\vec{x}^T(k)Q_1\vec{x}(k)+\sum_{k=1}^{K=1}\vec{u}^T(k)R_1^{-1}\vec{u}(k)]/\vec{z}(\vec{x}(k))\right\}, \quad (6)$$

где $\rho$ и $Q_1$- неотрицательно определенные матрицы;

$R_1$- положительно определенная матрица. Остальные параметры имеют введенный выше смысл.

Как показано в работах [1, 3], для линейной постановки задачи (3, 4.) справедлив принцип разделения, который разбивает решение общей стохастической динамической задачи управления на два раздельно выполняемых, но взаимоувязанных этапа:

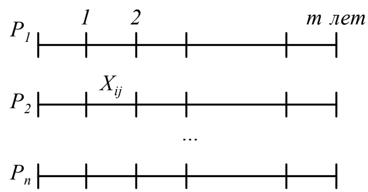
- этап получения стохастической оптимальной оценки $\vec{x}(k)=M[\vec{x}(k)/\vec{z}(k)]$ состояния процесса $\vec{x}(k)$ на основе наблюдений $\vec{z}(k)$ ;
- этап формирования детерминированных управляющих воздействий $\vec{u}^{опт}(k)=-L(k)\vec{x}(k)$ , линейно связанных с оценкой состояния.

Наиболее конструктивным при решении задачи динамической оптимизации управления оказывается динамическое программирование. Динамическое программирование предназначено для изучения многошаговых процессов, обладающих определенными свойствами инвариантности.

Это особый метод, он специально приспособлен для оптимизации динамических задач, в которых операция состоит из элементов, сильно влияющих друг на друга. ДП связано с именем Ричарда Беллмана, который сформулировал принцип Беллмана. Он позволяет существенно сократить перебор решений в многоэтапных нелинейных задачах.

**Принцип оптимальности Беллмана**

Принцип оптимальности Беллмана ставит вопрос о том, что такое оптимальность отдельного элемента системы с точки зрения оптимальности всей системы:




*каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге.*

Принимая решение на отдельном этапе, мы должны выбирать управление на этом этапе с прицелом на будущее, т.к. нас интересует результат в целом по всем шагам. Беллман предложил рассматривать величину выигрыша от $i-$ го шага и до конца, если $i-$ ый шаг начинается с некоторого состояния $S$. Такую величину называют *условным оптимальным выигрышем* $W_i(S)$.

Тогда, принимая решение на каждом $i-$ шаге, мы должны выбрать решение $X_i$ так, чтобы условный оптимальный выигрыш был максимальным от $i-$ шага и до конца.

**Определение**: оптимальность в малом понимается через оптимальность в большом.

Любой процесс имеет где-то окончание, т.е. имеет горизонт планирования. Тогда последний этап «не имеет будущего». Вот именно его можно оптимизировать только из условий данного этапа. После этого приступают к оптимизации $(m-1)-$ го этапа. Выбирают такое $X_{m-1}$, чтобы при применении этого $X_{m-1}$ его можно было внести в управление последнего шага. При этом мы задаём состояние, с которого начинается $(m-1)-$ ый шаг. Поэтому функцию $W_i(S)$ называют *условным оптимальным выигрышем*. Таким образом, процесс оптимизации разворачивается от конца к началу, и начальное состояние становится известно. Принцип Беллмана нашёл применение в методе программно-целевого планирования (любое действие планируется некоторым проектом).

**Функциональное уравнение Беллмана.**

Назовём *состоянием системы* некоторый вектор координат: $S=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_L)$. В некоторых задачах состояние системы – одна величина. Тогда работу системы можно представить как движение в фазовом пространстве – пространстве состояний. Назовём это - *шаговым управлением* – управлением на $i-$ ом шаге. Рассмотрим процесс управления системой за $m$ шагов. Функция $W_i(S,U_i)$ называется *выигрышем на i-ом шаге*. Здесь $S-$ состояние перед $i-$ ым шагом, а $U_i-$ управление на $i-$ ом шаге.

Величина $W_i(S,U_i)$ должна быть известна до начала динамического программирования. Если состояние перед $i-$ ым шагом было $S$ и мы приняли какое-то управление $U_i$, то система перейдёт в новое состояние $S'=\phi_i(S,U_i)$. Эта функция должна быть так же известна. Если эти функции не заданы, то их надо сформулировать. Введём $W_i(S)-$ *условный оптимальный выигрыш*. Это выигрыш на всех этапах от $i$ до конца, если $i-$ ый шаг начинается с состояния $S$.

Рассмотрим $m$ шагов. Начнём с $(i+1)-$ го шага. Предполагаем, что мы системой управляем оптимально, величина оптимального выигрыша $W_{i+1}(S')$. На $i-$ ом шаге - любое управление. $\widetilde{W}_i(S)-$ неоптимальный выигрыш, т. к. на $i-$ ом шаге мы применяем управление $U_i$.

$$W_i(S)=\max_{U_i}\{W_i(S,U_i)+W_{i+1}(S')\}; \qquad S'=\phi_i(S,U_i);$$

$$\underset{\text{неизвестно}}{W_i(S)}=\max_{U_i}\{\underset{\text{известно}}{W_i(S,U_i)}+\underset{\text{неизвестно}}{W_{i+1}[\phi_i(S,U_i)]}\}$$

Это *функциональное уравнение Беллмана*. Для использования уравнения Беллмана оптимизацию начинают с конца:

- *этап условной оптимизации*

1) $i=m$

$$W_m(S)=\max_{U_m}\{f_m(S,U_m)\}.$$

2) $i=m-1$

$$W_{m-1}(S)=\max_{U_{m-1}}\{f_{m-1}(S,U_{m-1})+W_m[\phi_{m-1}(S,U_{m-1})]\}$$

Итак, идя от конца к началу, мы получаем последовательно:

$W_m(S),W_{m-1}(S),\ldots,W_1(S)$

$U_m(S),U_{m-1}(S),\ldots,U_1(S)$

Придя в начальное состояние $W_1(S)$, мы можем подставить $S = S_0$ и $W_1(S_0) = W_{max}$ – это безусловный выигрыш.

- *этап безусловной оптимизации*

Теперь необходимо получить, идя от начала к концу по цепочке, на каждом шаге (этапе) безусловно оптимальные уравнения:

$$U_1(S)=U_1(S_0)=U_1'$$

$$\phi_1(S,U_1)=\phi(S_0,U_1')=S_1'$$

$$U_2(S)=U_2'$$

$$\phi_2(S,U_2)=\phi(S_1',U_2')$$

Итак, в конце мы получаем безусловно оптимальное решение:

$$U_1',U_2',\ldots,U_m';W_{\max}$$

**Пример:** транспортная задача.

Все вышеприведенное определено для конечных вариационных задач, т. е. основано на методе обратного прогона.

Если мы рассматриваем бесконечные процессы (метод прямого прогона), являющиеся результатом либо бесконечных последовательностей операций, либо выборов, сделанных в каждой точке непрерывного множества, мы встречаемся с трудностью доказательства существования достигаемого максимума, а не просто локального супремума. Поэтому при рассмотрении лучше начать с уравнения функционала

$$f(p;S+T)=\lim_{D[0,S]}\sup(p_D;T) \quad ,$$

который предполагает, что супремум фактически достигается и в пределе может быть заменен максимумом, при $S\to 0$ будет предельный случай нелинейного дифференциального уравнения, где $p$ — начальное состояние, $p\in D$ , $D$ — ограниченная замкнутая область состояний, $S$ — состояние в точке $t$ интервала *[0,T]*.

В теории динамического программирования имеется еще один важный метод приближения, который называется «приближением в пространстве поведений». Он рассматривает естественную двойственность между функцией *f(p)*, описывающей максимальный функционал, и оптимальным(-и) поведением(-ями) *q=q(p)*. В задаче *q* рассматривается как индекс поведения (управления) среди всех возможных по множеству поведений *Q* для *D*.

**Заключение**

Задача векторной динамической оптимизации принятия решения связана с преодолением проблем редукции, нормализации и скаляризации. Предварительная редукция множества решений может быть осуществлена непосредственно в пространстве критериев на основе методов поиска множеств компромисса (множеств Парето).

Фундаментальную роль в синтезе оптимальных управлений для линейной постановки задачи и среднеквадратичного критерия оптимальности имеет принцип разделения. В соответствии с ним задача стохастического оптимального управления решается в два этапа: этап стохастического оценивания состояния объекта и этап поиска детерминированных управляющих воздействий, линейно связанных с оценками состояния.