«Оптимизация и математические методы принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД
Владимиров Сергей Александрович

Лекция 8

Задачи выбора решений. Метод экспертных оценок. Нечеткие множества. Сетевое планирование.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Литература:

1. Таха Х. Введение в исследование операций . В двух книгах .Пер. с англ. М.: Мир 1985.
2. Щекотихин В.М., Терентьев В.М. Прикладная математика.- Орел: Академия ФАПСИ, 2002.
3. Терентьев В.М. , Паращук И.Б. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосвязи. С –Пб.: ВАС 1995.
4. Терентьев В. М., Илюхин А. А., Куцакин А. И., Осипов А. Н. Основы построения сетей спутниковой связи с подвижными объектами: Учебное пособие. – Орел: Академия Спецсвязи России, 2004.

Введение

Задачи выбора решений составляют значительный пласт задач оптимизации, при котором для построения алгоритма решения используются различные методы.

Довольно часто в реальных задачах множество альтернатив не ясно с самого начала и требует привлечения и организации дополнительных процедур для подготовки к принятию решения. Оценка ценности каждой альтернативы требует специальных методов измерения полезности.

Кроме этого, во многих задачах, особенно в задачах автоматизации управления, присутствуют так называемые нечеткие переменные и нечеткие критерии и альтернативы, для которых рассматриваются вопросы «человекоподобного» - субъективного восприятия информации.

Для поддержки решения таких задач оптимизации применяются различные методы, рассмотрим три из них на основе:

- метода экспертных оценок;
- аппарата нечетких множеств;
- метода сетевого планирования.

Задача выбора решений на основе метода экспертных оценок.

Во многих практических задачах при принятии решения возникает принципиальная сложность оценить существующие альтернативы. Например, надо дать оценку качества конкретной физической системы: сети связи, аппаратно-программной подсистемы и пр. Количество параметров, которые влияют на оценку системы может быть так велико и они настолько разнообразны, что невозможно раз и навсегда задать какой-то способ установки соответствия между качеством системы и числом.

В этом случае используют ***метод экспертных оценок***.

В этом методе решаются следующие задачи:

- Необходимо построить множество возможных и допустимых альтернатив решения;
- Сформировать набор аспектов, существующих для оценки альтернатив;
- Определить критериальное пространство;
- Необходимо упорядочить альтернативы по аспектам;
- Получить оценку альтернатив по критериям (отобразить множество допустимых решений в критериальном пространстве).

Все эти задачи составляют часть общей задачи оценивания – сопоставления числа некоторой альтернативе.

Метод основан на использовании экспертных процедур. Общая схема экспертизы такова: саму оценку выполняют люди, специалисты в предметной области, которые называются **экспертами**. Для проведения самой экспертизы привлекается консультант. Он определяет множество альтернатив, а иногда и вспомогательное множество для экспертизы. Каждый эксперт выбирает свою оценку и передаёт её консультанту. Эта оценка обрабатывается по специальной схеме и получается единая для всех экспертов оценка для каждой альтернативы. Затем по определённому правилу выбирается оптимальная оценка консультантом. В схеме экспертизы заложен блок, который отвечает за оценку согласованности мнения экспертов или оценку компетентности экспертов.

Эксперты могут взаимодействовать друг с другом в одних видах экспертизы, либо наоборот, отделяются друг от друга в других методах. В известном методе экспертизы Делфи, экспертам «вновь» предлагаются результаты экспертизы и просят посмотреть на них и призадуматься. Этот метод устанавливает «обратную связь» при экспертизе.

В первом туре опроса ***методом Дельфи*** экспертам предлагаются вопросы, на которые они дают ответы без аргументирования. Полученные от экспертов данные обрабатываются с целью выделения среднего или медианы и крайних значений оценок. Экспертам сообщаются результаты обработки первого тура опроса с указанием расположения оценок каждого эксперта. Если оценка эксперта сильно отклоняется от среднего значения, то его просят аргументировать свое мнение или изменить оценку.

Во втором туре эксперты аргументируют или изменяют свою оценку с объяснением причин корректировки. Результаты опроса во втором туре обрабатываются и сообщаются экспертам. Если после первого тура производилась корректировка оценок, то результаты обработки второго тура содержат новые средние и крайние значения оценок экспертов. В случае сильного отклонения индивидуальных оценок от средних эксперты должны аргументировать или изменить свои суждения, пояснив причины корректировки.

Проведение последующих туров осуществляется по аналогичной процедуре. Обычно после третьего или четвертого тура оценки экспертов стабилизируются, что и служит критерием прекращения дальнейшего опроса.

При проведении опроса в методе Дельфи сохраняется анонимность ответов экспертов по отношению друг к другу. Это обеспечивает исключение влияния конформизма, т.е. подавления мнений за счет “веса” научного авторитета или должностного положения одних экспертов по отношению к другим.

Типы задач оценивания.

Оценивание – составление альтернатив какого-то вектора евклидова пространства.

1) Пусть X – некоторая альтернатива в множестве альтернатив. $X \in \Omega$. Имеется m критериев, тогда требуется каждой альтернативе сопоставить некоторый вектор $\{f_i(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)\} \in F_m$. Это общая задача оценивания.

2) Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – критерии, учитываемые при выборе. Эти критерии надо установить по возможности, т.е. здесь оценивается система критериев. Система этих критериев сопоставляется значимостью для альтернативы, как перестановка натуральных чисел. Это задачи ранжирования.

3) Пусть некоторое множество Q разбито на l подмножеств и для какой-то альтернативы $X \in Q$ необходимо указать, какому подмножеству она принадлежит, т.е. X сопоставляется конкретное подмножество. Это задача классификации.

4) Пусть X – отрезок, длину которого надо измерить; т. е. отрезку надо сопоставить действительное число. Это самая простая и самая распространённая задача оценивания.

Обозначим $\Omega-$ исходное множество допустимых оценок; Ω_E- множество допустимых оценок для экспертов; $L-$ тип взаимодействия между экспертами; $Q-$ наличие обратной связи; $\phi-\left(\Omega_E^N-\Omega\right)-$ алгоритм обработки. Все методы обработки экспертной информации можно разбить на три вида:

1) **Статистический метод**

Результаты оценок каждого эксперта можно рассматривать как реализацию некоторой случайной величины из множества и применять к ним методы математической статистики.

2) **Алгебраический метод**

Методы численных оценок альтернатив — когда задача состоит в сопоставлении оцениваемой альтернативе одного числа, - метод попарного сравнения, метод прибавления баллов.

3) **Методы шкалирования.**

Метод ранжирования - выстраивание критериев или альтернатив по важности.

Оценка каждого эксперта рассматривается, как случайная величина. Обработка производится на основе методов математической статистики, которая позволяет определить согласованность методов экспертов и значимость, т.е. качество экспертизы.

Например:

Дается *численная оценка* - каждой альтернативе ставится в соответствие одно число.

$\Omega = E_1, \Omega_E = E_1$; $L -$ эксперты изолированы;

$Q -$ обратная связь отсутствует; $N -$ количество экспертов:

$$\varphi(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i * \alpha_i)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i} = a \quad \text{, где}$$

$\alpha_i -$ веса экспертов; при отсутствии информации компетентности $\alpha_i = 1$;

$X_i -$ числовые оценки экспертов.

Степень согласованности экспертов определяется выражением:

$W = D/D_{max}$ - дисперсионный коэффициент конкордации - определяется как отношение оценки дисперсии к максимальному значению этой оценки.

Коэффициент конкордации изменяется от нуля до единицы, поскольку $0 \le D \le D_{max}$. Коэффициент конкордации равен 1, если все ранжировки экспертов одинаковы, и равен нулю, если все ранжировки различны.

Максимальное значение дисперсии равно $D_{max} = \frac{d^2(m^3 - m)}{12(m-1)}$

Введем обозначение $S = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{d} r_{i,s} - \bar{r}\right)^2$

Используя S, запишем оценку дисперсии D в виде $D = \frac{S}{(m-1)}$, где r_{is} - ранг, присваиваемый s-м экспертом i-му объекту, $\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} r_i$ - оценка математического ожидания, m-объектов или туров, d-экспертов.

Компетентность – степень квалификации эксперта в определенной области знаний. Компетентность может быть определена на основе анализа плодотворной деятельности специалиста, уровня и широты знакомства с достижениями мировой науки и техники, понимания проблем и перспектив развития. Для количественной оценки степени компетентности используется коэффициент компетентности, с учетом которого взвешивается мнение эксперта. Коэффициент компетентности определяется по априорным и апостериорным данным.

Существует ряд методик определения коэффициента компетентности по априорным данным. Наиболее простой является методика оценки относительных коэффициентов компетентности по результатам высказывания специалистов о составе экспертной группы. Ряду специалистов предлагается высказать суждение о включении лиц в экспертную группу для решения определенной проблемы. Проведя несколько туров такого опроса, можно составить достаточно полный список кандидатов в эксперты. По результатам проведенного опроса составляется матрица, в ячейках которой проставляются переменные $x_{i,j}$, равные $x_{i,j}=1$, если j-й эксперт назвал i-го эксперта $x_{i,j}=0$, если j-й эксперт не назвал i-го эксперта. Причем каждый эксперт может включать или не включать себя в экспертную группу. По данным матрицы вычисляются коэффициенты компетентности как относительные веса экспертов по формуле $k_i=\frac{\sum_{j=1}^{m} x_{i,J}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{i,J}}, \quad (i=1,m)$

где k_i – коэффициент компетентности i-го эксперта, m — количество экспертов (размерность матрицы $\|x_{i,j}\|$). Коэффициенты компетентности нормированы так, что их сумма равна единице: $\sum_{i=1}^{m} k_i=1$

Задача выбора решений на основе аппарата нечетких множеств.

Основные понятия нечетких множеств

Пусть ***A*** - некоторое множество. Подмножество B множества ***A*** характеризуется своей характеристической функцией

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B,\\ 0, & x\notin B.\end{cases} \qquad (1)$$

Что такое нечеткое множество? Обычно говорят, что нечеткое подмножество C множества ***A*** характеризуется своей функцией принадлежности $\mu_C: A\to[0,1]$. Значение функции принадлежности в точке x показывает степень принадлежности этой точки нечеткому множеству. Нечеткое множество описывает неопределенность, соответствующую точке x – она одновременно и входит, и не входит в нечеткое множество C. За вхождение в ***A*** - $\mu_c(x)$ шансов, за второе (не входит в ***A***) – (1- $\mu_c(x)$) шансов.

Если функция принадлежности $\mu_C(x)$ имеет вид (1) при некотором *B*, то *C* есть обычное (четкое) подмножество ***A***. Таким образом, теория нечетких множеств является не менее общей математической дисциплиной, чем обычная теория множеств, поскольку обычные множества – частный случай нечетких.

Обычное подмножество можно было бы отождествить с его характеристической функцией. Этого математики не делают, поскольку для задания функции (в ныне принятом подходе) необходимо сначала задать множество. Нечеткое же подмножество с формальной точки зрения можно отождествить с его функцией принадлежности. Однако термин «нечеткое подмножество» предпочтительнее при построении математических моделей реальных явлений.

Теория нечеткости является обобщением интервальной математики. Действительно, функция принадлежности

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

задает интервальную неопределенность – про рассматриваемую величину известно лишь, что она лежит в заданном интервале [a,b]. Тем самым описание неопределённостей с помощью нечетких множеств является более общим, чем с помощью интервалов.

Начало современной теории нечеткости положено работой 1965 г. американского ученого азербайджанского происхождения Л.А.Заде.

Л.А.Заде рассматривал теорию нечетких множеств как аппарат анализа и моделирования гуманистических систем, т.е. систем, в которых участвует человек. Его подход опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от "принадлежности" к "непринадлежности" не скачкообразен, а непрерывен. В настоящее время методы теории нечеткости используются почти во всех прикладных областях, в том числе при управлении предприятием, качеством продукции и технологическими процессами.

Л.А. Заде использовал термин "fuzzy set" (нечеткое множество). На русский язык термин "fuzzy" переводили как нечеткий, размытый, расплывчатый.

Аппарат теории нечетких множеств.

В качестве примера дадим определения теоретико-множественных операций над нечеткими множествами. Пусть C и D - два нечетких подмножества $\boldsymbol{A}$ с функциями принадлежности $\mu_C(x)$ и $\mu_D(x)$ соответственно. Пересечением $C \cap D$, произведением CD, объединением $C \cup D$, отрицанием $\overline{C}$, суммой $C+D$ называются нечеткие подмножества $\boldsymbol{A}$ с функциями принадлежности

$$\mu_{C\cap D}(x)=\min(\mu_C(x),\mu_D(x)),\ \mu_{CD}(x)=\mu_C(x)\mu_D(x),\ \mu_{\overline{C}}(x)=1-\mu_C(x),$$

$$\mu_{C\cup D}(x)=\max(\mu_C(x),\mu_D(x)),\quad \mu_{C+D}(x)=\mu_C(x)+\mu_D(x)-\mu_C(x)\mu_D(x),\quad x\in A,$$

соответственно.

Как уже отмечалось, теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории вероятностей, а именно, к теории случайных множеств. Однако при решении прикладных задач вероятностно-статистические методы и методы теории нечеткости обычно рассматриваются как различные.

Для оценки значений показателей, не имеющих количественной оценки, можно использовать методы нечетких множеств. Например, нечеткие множества применялись при моделировании задач ценообразования на электронные обучающие курсы, используемые при дистанционном обучении, а также для определения прогноза рейтинга специальности в вузе с помощью экспертов.

Статистика нечетких множеств

Нечеткие множества – частный вид объектов нечисловой природы. Статистические методы анализа объектов нечисловой природы описаны в [3]. В частности, среднее значение нечеткого множества можно определить по формуле:

$$M(A)=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)},$$

где $\mu_A(x_i)$ - функция принадлежности нечеткого множества А.

Как известно, методы статистики *нечисловых* данных базируются на использовании расстояний (или показателей различия) в соответствующих пространствах нечисловой природы. Расстояние между нечеткими подмножествами A и B множества X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ можно определить как

$$d(A,B)=\sum_{j=1}^{k}|\mu_A(x_j)-\mu_B(x_j)|,$$

где $\mu_A(x_j)$ - функция принадлежности нечеткого множества A, а $\mu_B(x_i)$ - функция принадлежности нечеткого множества B. Может использоваться и другое расстояние:

$$d_1(A,B)=\frac{\sum_{j=1}^{k}|\mu_A(x_j)-\mu_B(x_j)|}{\sum_{j=1}^{k}(\mu_A(x_j)+\mu_B(x_j))}.$$

(Примем это расстояние равным 0, если функции принадлежности тождественно равны 0.)

В соответствии с аксиоматическим подходом к выбору расстояний (метрик) в пространствах нечисловой природы разработан обширный набор систем аксиом, из которых выводится тот или иной вид расстояний (метрик) в конкретных пространствах [1,2,4]. При использовании вероятностных моделей расстояние между случайными нечеткими множествами само является случайной величиной, имеющей в ряде постановок асимптотически нормальное распределение [2].

Нечеткие множества как проекции случайных множеств

С самого начала появления современной теории нечеткости в 1960-е годы началось обсуждение ее взаимоотношений с теорией вероятностей. Дело в том, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает распределение вероятностей. Отличие только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины (или интеграл, если множество возможных значений несчетно) всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности (в непрерывном случае - интеграл от функции принадлежности) может быть любым неотрицательным числом. Возникает искушение пронормировать функцию принадлежности, т.е. разделить все ее значения на S (при $S \neq 0$), чтобы свести ее к распределению вероятностей (или к плотности вероятности). Однако специалисты по нечеткости справедливо возражают против такого «примитивного» сведения, поскольку оно проводится отдельно для каждой размытости (нечеткого множества), и определения обычных операций над нечеткими множествами с ним согласовать нельзя. Последнее утверждение означает следующее. Пусть указанным образом преобразованы функции принадлежности нечетких множеств A и B. Как при этом преобразуются функции принадлежности $A \cap B, A \cup B, A + B, AB$? Установить это *невозможно в принципе.* Последнее утверждение становится совершенно ясным после рассмотрения нескольких примеров пар нечетких множеств с одними и теми же суммами значений функций принадлежности, но различными результатами теоретико-множественных операций над ними, причем и суммы значений соответствующих функций принадлежности для этих результатов теоретико-множественных операций, например, для пересечений множеств, также различны.

Авторы, сравнивавшие теорию нечеткости и теорию вероятностей, обычно подчеркивали различие между этими областями теоретических и прикладных исследований. Обычно сравнивают аксиоматику и сравнивают области приложений.

При сравнении различных аксиоматик теории нечеткости и теории вероятностей нетрудно увидеть, что списки аксиом различаются. Из этого, однако, отнюдь не следует, что между указанными теориями нельзя установить связь, типа известного сведения евклидовой геометрии на плоскости к арифметике (точнее к теории числовой системы). Напомним, что эти две аксиоматики - евклидовой геометрии и арифметики - на первый взгляд весьма сильно различаются.

Как оказалось, теория нечетких множеств тесно связана с теорией случайных множеств и первые могут рассматриваться как «проекции» случайных множеств. Можно ожидать, что теория нечеткости как некое общее целое обобщает классическую математику. Однако теория нечеткости в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым является частью классической математики. Другими словами, по степени общности обычная математика и нечеткая математика эквивалентны. Однако для практического применения в теории принятия решений описание и анализ неопределенностей с помощью теории нечетких множеств весьма плодотворны.

Основы сетевого планирования

1. Основные понятия сетевого планирования.
2. Порядок построения сетевого графика.
3. Оценка времени завершения событий, работ и путей сетевого графика.
4. Оптимизация параметров сетевого графика и временного плана операции.

Сетевая модель отображает взаимосвязи между операциями и порядок их выполнения (отношение упорядочения или следования). Как правило, для представления операции (*работы*) используется стрелка (ориентированная дуга), направление которой соответствует процессу реализации программы во времени. Отношение упорядочения между операциями задается с помощью *событий*.

Сетевое планирование это способ разработки *рационального* плана проведения (осуществления) операции в кратчайший срок и с минимальными затратами. Сетевое планирование является инструментом должностных лиц, планирующих мероприятия по осуществлению сложных многофазных оперативных и технологических операций, а также определению в них наиболее *узких мест* с целью их устранения за счет перераспределения ресурсов с менее напряженных этапов операции.

Примерами задач, решаемых с помощью сетевого планирования являются: задача планирования развертывания и эксплуатационного обслуживания наземных, радиорелейных, тропосферных и спутниковых линий связи; задача разработки учебного плана подготовки специалистов - связистов; задача разработки и проведения определенного вида занятий со студентами в рамках принятой учебной программы.

Постановка перечисленных задач сетевого планирования начинается с выявления узловых моментов (***событий*** **)** операции , определяющих начало и конец основных ее этапов. Затем определяются мероприятия (***работы***), приводящие к свершению каждого события и сопровождаемые затратами времени и ресурсов. Наконец, события и соответствующие им работы выстраиваются в некоторую логическую последовательность, графически представляемую в виде ***сетевого графика***, отражающего все ***пути*** достижения конечной цели операции.

Последующий анализ временных и вероятностных характеристик сетевого графика имеет целью оценить степень достижения всех оперативно-технических требований к каждому этапу и операции в целом, а также выявить *узкие места* в ней с возможной их ликвидацией за счет перераспределения части ресурсов с благополучных этапов операции.

Событие – начальная (либо конечная) точка работы, не связанная с затратами времени и ресурсов.

Работа – конечный во времени процесс выполнения мероприятия, связанный с затратами времени и расходом ресурса.

Основные свойства сетевого графика:

- событие происходит тогда, когда все входящие в него работы являются завершенными;
- исходящая из события работа может начаться только после его свершения;
- последующая работа может начаться только после окончания предшествующей работы.

Построение сетевого графика начинается с определения перечня событий и их нанесением на график в соответствии с рангом. Ранг события определяется его порядковым номером в общей последовательности событий, так например, исходное событие имеет нулевой ранг, следующее за ним - первый и т.д.. Затем на график наносятся работы в виде линий, соединяющих исходящие и последующие события. При этом работы кодируются буквой латинского алфавита и двухзначным кодом, первый разряд, которого означает ранг исходящего события, а второй-последующего, например A_{ij}, i $i \neq j$ j. В общем случае сетевой график (рисунок№1) представляет собой граф, узлы которого a_i - события, а ориентированные дуги A_{ij} - работы. При этом в графе любая дуга отражает только одну работу, а в случае возникновения ситуации, когда две работы имеют одни и те же исходящие и входящие узлы (события) вводят дополнительную фиктивную работу, не связанную с затратами времени и других ресурсов.

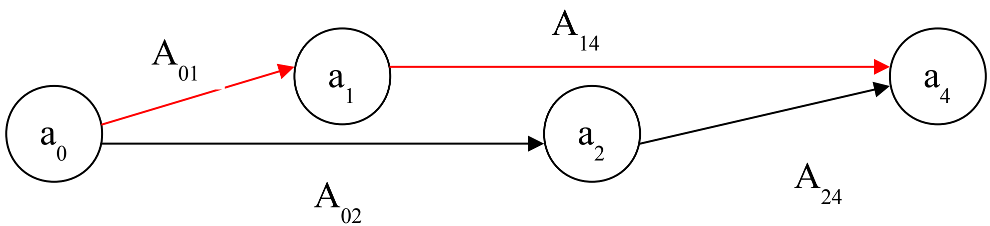

Рис. 1.

Значимыми параметрами такого сетевого графа являются *раннее* и *позднее время* свершения *события*, которые определяют ранее — как время, ранее которого событие не состоится и соответственно позднее, как время, позже которого событие произойти не может. Резервное время определяется, как разница между поздним и ранним временем.

Одна из возможных последовательностей событий и работ от исходного события до завершающего называется ***путем*** сетевого графика. Путь, имеющий максимальное время выполнения каждой из входящих в него работ и суммарное время выполнения всей операции называется ***критическим путем***.

Рассмотрим пример составления сетевого графика для задачи развертывания линии радиорелейной связи между двумя пунктами управления. Исходные данные зададим в виде таблиц с перечнем событий и работ в планируемой операции по развертыванию линии связи.

a_0	Сбор личного состава
a_1	Вручены схемы- приказы на обеспечение связи между ПУ
a_2	Прибыла в район развертывания РРС№1
a_3	Прибыла в район развертывания РРС№2
a_4	РРС№1 развернута
a_5	РРС№2 развернута
a_6	Установлена служебная связь между РРС№1и 2
a_7	Завершена регулировка каналов и они сданы в эксплуатацию

Обозн. работ	Наименование работ	Время выполнения работы(ч)	Предшествующие работы	Последующие работы
A_{01}	Прибытие в район сбора	0,5	-	A_{12},A_{13}
A_{12}	Совершение марша в район развертывания РРС№1	1	A_{01}	A_{24}
A_{13}	Совершение марша в район развертывания РРС№2	2	A_{01}	A_{35}
A_{24}	Развертывание РРС№1	0,5	A_{12}	A_{46}
A_{35}	Развертывание РРС№2	0,5	A_{13}	A_{56}
A_{46}	Установление служебной связи с РРС№2	20мин	A_{24}	A_{67}

A_{56}	Установление служебной связи с РРС№1	20мин	A_{35}	A_{67}
A_{67}	Регулировка и сдача каналов в эксплуатацию	10мин	A_{46},A_{56}	-

Соответствующий исходным данным сетевой график представлен на рисунке №2.

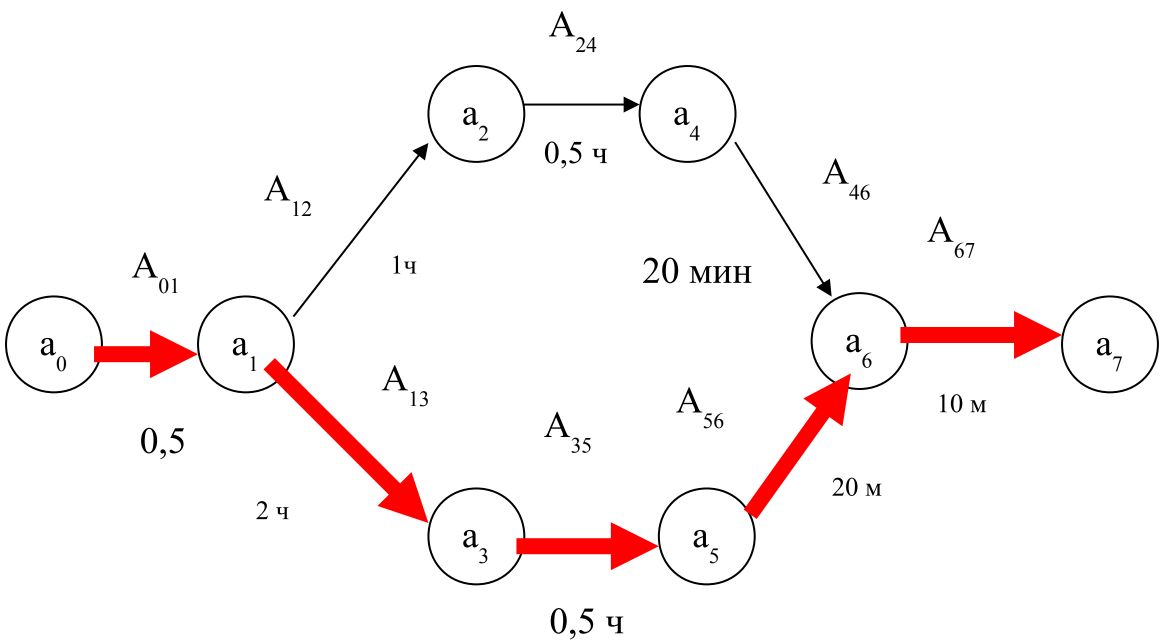

Рис. 2.

Анализ параметров сетевого графика сводится к расчету: $T_р(j) = \max\{T_р(i) + t_{ij}\}$- раннее возможное (прямое) время наступления j-го события ; $T_п(i) = \min[T_п(j) - t_{ij}]$- позднее допустимое (обратное) время наступления i-го события; $R_i = T_п(i) - T_р(j)$- резерв времени i-го события; $r_п(ij) = T_п(j) - T_р(i) - t_{ij}$- полный резерв ij-й работы ; $r_с(ij) = T_р(j) - T_п(i) - t_{ij}$- свободный резерв времени для ij-й работы; t_{ij}- продолжительность выполнения ij-й работы. Путь, для которого полные резервы равны нулю (т.е. суммарное время максимально) выделяется как критический.

Результаты расчета временных параметров сетевого графика можно представить в виде следующей таблицы:

Событие i(j)	$T_р(j)$	$T_п(i)$	R_i	$r_п(ij)$	$r_с(ij)$
0	0	0	0	$r_п(01)=0$	$r_с(01)=0$
1	0,5	0,5	0	$r_п(12)=1$	$r_с(12)=0$
2	1,5	2,5	1	$r_п(24)=1$	$r_с(24)=0$
3	2,5	2,5	0	$r_п(46)=1$	$r_с(46)=0$
4	2	3	1	$r_п(13)=0$	$r_с(13)=0$
5	3	3	0	$r_п(35)=0$	$r_с(35)=0$
6	3ч 20м	3ч 20м	0	$r_п(56)=0$	$r_с(56)=0$
7	3ч 30м	3ч 30м	0	$r_п(67)=0$	$r_с(67)=0$

Как видно из таблицы критическим путем в сетевом графике является путь 0-1-3-5-6-7, для которого $r_п(ij)=r_с(ij)=0$ и суммарное время выполнения всех работ $T\sum$ = 3 часа 30 минут.

Оптимизация процесса развертывания радиорелейной линии связи на основе параметров сетевого графика начинается с выявления *узких* мест, определяющих временные задержки на критическом пути. Такими работами являются: совершение марша и развертывание РРС№2. Для коррекции плана развертывания линии в сторону уменьшения общих временных затрат целесообразно построить (временной) календарный план, в котором по оси абсцисс отложено текущее время, а по оси ординат критический путь и отрезки времен выполнения некритических работ по ранним и поздним срокам их выполнения. На рисунке №3 представлен временной график выполнения работ по развертыванию радиорелейной линии связи. Красным цветом показан критический путь (0-1-3-5-6-7), который проходит РРС№2, а пунктиром отрезки некритического пути (0-1-2-4-6-7), проходимого РРС№1 до завершения операции развертывания. Как видно из графика узким местом в развертывании линии связи является марш, совершаемый РРС№2 до места развертывания. Возможный вариант перераспределения ресурса личного состава связан с включением в экипаж РРС№2 лучшего из двух имеющихся водителя-электромеханика, что позволит пройти марш без остановки на отдых, а также дополнительного радиорелейного механика из состава РРС№1. При этом время марша РРС№2 может быть сокращено на 0,5 часа, а время развертывания стации №2 на 10 минут. В результате общее время выполнения задачи станцией №2 будет сокращено с 3часов 30 минут до 2часов 50 минут. Вместе с тем время марша РРС№1 с учетом неопытности молодого водителя может быть увеличено на 5 минут, а допустимое время развертывания РРС№1 экипажем неполного состава на 10 минут, что также обеспечит полное время выполнения операции за 2часа 50 минут. Следовательно выигрыш по времени при скорректированном плане развертывания составит 3часа 30 минут – 2часа 50минут = 40 минут или более 20% от прежнего времени выполнения операции.

В предположении нормального закона распределения временных параметров сетевого графа при многократной реализации рассматриваемой операции, вероятность свершения j- го события в расчетный срок может быть определена по формуле

$$p_j(T \geqslant T_j) = \Phi\left\{ \frac{(T - T(j))}{\sqrt{\sum \sigma}} \right\},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{tt}{2})dt$ - функция нормального распределения;

T-заданный срок свершения события;

T(j)- время раннего свершения j-го события;

σ_{ij}- среднеквадратическая ошибка в определении продолжительности работ, приводящих к раннему свершению j-го события.

Заключение

Таким образом, использование методов сетевого планирования позволяет:

a) наглядно представлять последовательность и сроки выполнения работ каждым исполнителем (в виде пути на графике) при совместном участии всех в достижении цели операции;

b) определять *узкие места* в общем алгоритме реализации данной операции и границы временных ресурсов для ненапряженных работ на ее различных этапах;

c) корректировать временной план выполнения работ каждому исполнителю на основе перераспределения временных и людских ресурсов с целью выполнения операции в кратчайшие сроки и с минимальными затратами ресурсов.