«Оптимизация и математические методы принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД
Владимиров Сергей Александрович

Лекция 1

Основные понятия теории принятии решений, исследования операций и системного анализа

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Литература:

1. Менеджмент / Под ред. Ж.В. Прокофьевой. - М.: Знание, 2000.
2. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981.
3. Науман Э. Принять решение, но как? - М.: Мир, 1987.
4. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Наука, 1979.
5. Карминский А.М., Оленев Н.И., Примак А.Г., Фалько С.Г. Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы построения контроллинга в организациях. - М.: Финансы и статистика, 1998.
6. Хан Д. Планирование и контроль: концепция контроллинга / Пер. с нем. - М.: Финансы и статистика, 1997.
7. Терентьев В.М., Паращук И.Б. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосвязи. - С-Петербург: ВАС, 1995.

Введение в теорию принятия решений

Теория принятия решений — комплексная научная дисциплина, направленная на разработку методов и средств, помогающих одному или нескольким лицам сделать обоснованный выбор наилучшего из имеющихся вариантов.

Слово «решение»:

1. Совокупность рассматриваемых возможностей, которые тем или иным образом выделены человеком, делающим выбор.
2. Процесс поиска наиболее предпочтительных вариантов, включающий в себя обдумывание, изучение какого-либо вопроса или задачи, нахождение правильного ответа.
3. Ответ, например один или несколько выбранных вариантов, результат анализа некоторой проблемы или математической задачи.

Задачи принятия решений часто отождествляются с задачами выбора.

Основное назначение теории принятия решений состоит в разработке методов и средств, позволяющих одному человеку или группе лиц сформулировать множество возможных вариантов решения проблемы, сравнить их между собой, найти среди них лучшие или допустимые варианты, которые удовлетворяют тем или иным требованиям (ограничениям), и при необходимости объяснить сделанный выбор.

Лицо, принимающее решение (ЛПР) или *действующее лицо* — человек или группа людей, которые фактически осуществляют выбор предпочтительного решения.

Обычно в роли ЛПР выступает руководитель или группа компетентных в своей области специалистов, обладающих соответствующими знаниями и опытом деятельности, наделенных необходимыми полномочиями для принятия решения и несущих ответственность за реализацию принятого решения.

Владелец проблемы (ВП) — человек или группа лиц, имеющих основания и мотивы для постановки проблемы, осознающих необходимость ее решения, инициирующих тем или иным образом принятие и выполнение нужного решения.

Активные группы (АГ) — объединяют людей, которые имеют общие интересы по отношению к проблеме, требующей решения, и стремятся оказать влияние на процесс выбора с тем, чтобы добиться нужного им результата. Активные группы — окружение, в котором протекает процесс решения проблемы и действует ЛПР.

Обычно владелец проблемы принадлежит к одной из основных активных групп.
В сложных ситуациях выбора на разных этапах могут привлекаться эксперты (Э) и консультанты по принятию решений (К).
Эксперты — компетентные специалисты, профессионально разбирающиеся в решаемой проблеме, обладающие необходимой информацией о проблеме и отдельных ее аспектах, но не несущие ответственности за принятое решение и его реализацию.
Консультанты по принятию решений оказывают помощь ЛПР и владельцу проблемы в организации процесса ее решения, в правильной постановке задачи принятия решения, обеспечивают сбор необходимой информации, разрабатывают модель проблемы, процедуры и методы принятия решения.

Жизненный цикл решения проблемы - общая модель принятия решения.

Введение в системный анализ и исследование операций

«Системный анализ — это дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации различной физической природы» (Н.Н. Моисеев) [1].

Общим в определении понятия «система» является то, что о системе говорят как о множестве, между элементами которого имеются связи и которое удовлетворяет основному ее свойству — *целостности*.

Исследование операций — как отрасль знаний, объединяющая теории математических моделей и методов принятия решений предполагает наличие следующих элементов.:

1. Некоторого **процесса (модели операции**, как системы действий, объединенных единым замыслом и направленных на достижение определенной цели**)**
2. **Цели** проведения операции
3. **Множества решений (управляющих воздействий)**
4. **Метода** отыскания лучшего (оптимального) решения, при котором достигается цель

Традиционная схема исследования операции:

1. Строится математическая модель явления или процесса.
2. Полученный математический объект изучается чисто математическими методами.
3. Математические результаты интерпретируются на реальные практические проблемы.

Классификация задач исследования операций

По зависимости параметров задачи от времени

1. **Статическая задача.** Принятие решения происходит при условии, что все параметры известны и не изменяются во времени. Процедура принятия решения осуществляется один раз.

2. **Динамическая задача.** В процессе принятия решения параметры задачи изменяются во времени. Процедура принятия решения осуществляется поэтапно и может быть представлена в виде процесса, зависящего от времени, в том числе непрерывно. Пример — навигационная задача.

В зависимости от достоверности информации о задаче

1. **Детерминированная задача.** Все параметры задачи заранее известны. Для решения детерминированных задач в основном применяются методы математического программирования.

2. **Недетерминированная задача.** Не все параметры задачи заранее известны. Оптимальное решение недетерминированной задачи отыскать практически невозможно. Но, некоторое «разумное» решение отыскать можно.

2.1. **Стохастическая задача.** Не все параметры задачи заранее известны, но имеются статистические данные о неизвестных параметрах, (вероятности, функции распределения, математические ожидания и т. д.).

Для отыскания оптимального решения стохастической задачи применяется один из следующих приемов:

- искусственное сведение к детерминированной задаче (неизвестные значения параметров заменяются их средними значениями),
- «оптимизация в среднем» (вводится и оптимизируется некоторый статистический критерий).

2.2. **Задача в условиях полной неопределенности.** Статистические данные о неизвестных параметрах отсутствуют. Такие задачи в основном изучаются в теории игр.

По виду критерия оптимальности

Критерий оптимальности может иметь любой вид, в том числе не формализуемый.

Наиболее распространенные формализуемые критерии оптимальности заключаются в оптимизации (минимизации или максимизации) одной либо несколько скалярных целевых функций.

Функция называется скалярной, если ее значением является некоторое число.

Задача оптимизации скалярной функции на заданном множестве допустимых числовых решений называется задачей математического программирования.

Однокритериальные задачи (задачи с одной целевой функцией)

- *Задача линейного программирования*. Целевая функция — линейная, множество допустимых решений — плоский или выпуклый многогранник.
- *Задача квадратичного программирования*. Целевая функция — квадратичная $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j} x_i x_j$, множество допустимых решений — выпуклый многогранник.
- *Задача стохастического программирования*. Это подобные линейным задачи с неизвестными числовыми параметрами, о которых имеются статистические данные, либо их получают в процессе решения.
- *Задача дискретного программирования*. Множество допустимых решений — дискретное множество.
- *Задача целочисленного программирования*. Множество допустимых решений — точки целочисленной решетки.
- *Задача булева программирования*. Множество допустимых решений — матрицы из 0 и 1.

Задача оптимизации решений

Задача принятия решения

Пара (Ω, P),

где Ω – множество вариантов,
P – принцип оптимальности.

Решением задачи является множество $\Omega_P \in \Omega$, полученное в соответствии с принципом оптимальности P.

Основная задача теории оптимальных решений состоит в представлении обоснованных количественных данных и рекомендаций для принятия оптимальных решений. Отсутствие хотя бы одного из элементов (Ω, P) лишает задачу смысла.

Математическим выражением принципа оптимальности P служит функция выбора C_p, которая со всеми подмножествами $X \in \Omega$ составляет его часть $C_p(x)$, из которых и находится оптимальное решение исходной задачи $C_{p,\text{оптим}}(\Omega)$.

Классы задач принятия решений

По полноте исходных данных

Задачи принятия решения различаются в зависимости от информации о множестве Ω и принципе оптимальности P:

1. *Общая задача принятия решения*: Ω, P – неизвестны, необходимо получить Ω_P в процессе самого решения.
2. Задача с известным, но ограниченным множеством Ω называется *задачей выбора решения*.
3. Задача, в которой Ω, P – известны называется *задачей оптимизации решений*.

По времени и срокам

1. *Долгосрочное стратегическое планирования*:
   задачи размещения обьектов производства в телекоммуникациях — узлов доступа разного уровня, развитие региональной телекоммуникационной сети.
2. *Среднесрочное планирование*:
   задачи маршрутизации трафика, задачи планирования инвестиционного строительства (с ограниченными ресурсами), задачи планирования текущего бюджета.
3. *Оперативное управление*:
   задачи текущего ремонта и устранения повреждений на сети, задачи распределения материалов на текущие нужды — установки и ремонт, транспортные задачи.

По типу постановки

Распределительная задача

Имеем

n — число предприятий;

Y — количество единиц некоторого ресурса;

$f_k(x)$ — количество продукции, которое будет произведено на k-м предприятии, если в него будет вложено x единиц ресурса (монотонно неубывающая функция).

Требуется: оптимизировать число единиц ресурса x_i, выделяемого каждому предприятию, с целью достижения максимума объема выпускаемой ими продукции

$$f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n) \to \max \quad (1)$$

$$x_1 + \ldots + x_n \le Y \quad (2)$$

$$x_i \ge 0, \text{ целые, } i = 1, \ldots n. \quad (3)$$

Оптимальное использование ресурсов

Предприятие выпускает n видов изделий. Для их производства используются m видов ресурсов (разное сырье, людские ресурсы, финансовые ресурсы и т. п.). Эти ресурсы ограничены, их запасы составляют в планируемый период $b_1, b_2, \ldots, b_m$ условных единиц. Известны также технологические коэффициенты: a_{ij} – сколько единиц i-го ресурса требуется в производстве единицы j-го вида продукции. c_j – прибыль от реализации единицы j-го вида продукции. Требуется составить такой план выпуска продукции (x_1^* – единицы изделий первого вида, x_2^* – единицы изделий второго вида и т. д.), при котором прибыль предприятия была бы наибольшей.

Пусть будем выпускать план ( ), тогда $a_{12}x_2$ – единиц 1-го ресурса пойдёт на всю программу выпуска 2-го вида продукции. Аналогично с другими видами продукции, поэтому общий расход $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ 1-го ресурса не должен превышать его запас. Записав это для всех ресурсов, имеем ( ). Суммарная прибыль – $\vec{c}^T\vec{x}$, в результате получаем задачу линейного программирования ( ).

Задача линейного программирования

Система или функции ограничений

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant b_m$$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Целевая функция

$$max\,F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

Двойственность в задачах

Пусть другая фирма хочет купить все запасы наших ресурсов. Какими должны быть цены $y_1, y_2, \ldots, y_m$ за единицу ресурса? Составляем

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases}.$$

Второе слагаемое в первом неравенстве показывает стоимость второго ресурса в единице продукции 1-го вида, и т. д. Вся сумма – себестоимость единицы продукции 1-го вида. При производстве оно принесёт нам прибыль c_1, поэтому цены продажи ресурсов должны обеспечить не меньше.

Покупатель ресурсов, учитывая ваши соображения, хочет, однако, купить подешевле: $\varphi(\vec{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$. Получили задачу

$$\vec{y}^* = \arg\min_{\vec{y}\in Q} \vec{b}^T\vec{y};$$

$$Q = \{\vec{y} : A^T\vec{y} \ge \vec{c}, \vec{y} \ge \vec{0}\},$$

двойственную к *прямой* задаче (3).

Определение: в двойственной задаче ищется противоположный оптимум (*min* ⇆ *max*) целевой функции. Коэффициентами целевой функции являются свободные члены системы ограничений прямой задачи. А свободными членами системы ограничений являются бывшие коэффициенты целевой функции. Матрица коэффициентов меняется на транспонированную, неравенства в системе ограничений – на противоположные.

Таким образом, прямая задача есть двойственная задача для своей двойственной задачи, т. е. они взаимно двойственные.

Теорема

Прямая и двойственная задачи либо обе имеют оптимальные точки $\vec{x}^*, \vec{y}^*$, причём $f_{\max} = \vec{c}^T \vec{x}^* = \vec{b}^T \vec{y}^* = \varphi_{\min}$, либо обе не имеют решения.

Для оптимальных точек выполняются следующие равенства, называющиеся условиями *дополняющей не жёсткости*:

$$\begin{cases} x_j^*(A^T \vec{y}^* - \vec{c})_j = 0,\ j = \overline{1,n} \\ y_i^*(A\vec{x}^* - \vec{b})_i = 0,\ i = \overline{1,m} \end{cases}.$$

Задача о рюкзаке

Общая модель динамической оптимизации размещения капитала

Дано: $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — проекты;

T — горизонт планирования (длина наиболее продолжительного проекта);

s_{tk} — доход от проекта P_k к концу года t;

y_{tk} — инвестиции в проект P_k в начале года t; $s_{0k} = y_{T+1k} = 0$;

r — коэффициент дисконтирования затрат

$b_k = \sum_{t=0}^{T} (s_{tk} - y_{t+1,k})/(1+r)^t$ — суммарная прибыль от проекта P_k;

$C = (c_1, \ldots, c_T)$ — доступный капитал для развития проектов

$A_k = (a_{1k}, \ldots, a_{Tk})$ — вектор затрат на реализацию проекта P_k (целые);

Если доход нельзя реинвестировать, то $a_{tk} = y_{tk}$, иначе $a_{tk} = y_{kt} - s_{t-1k}$.

Найти подмножество проектов, которые можно реализовать на капитал C и которые в сумме дают максимальную прибыль, то есть

$$\max \sum_{k=1}^{N} b_k x_k$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{N} a_{tk} x_k \le c_t\ , \quad t = 1, \ldots, T$$

$$x_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \ldots, N$$

Замечание 1. При $T = 1$ получаем линейную распределительную задачу с 0-1 переменными — задачу о рюкзаке.

Задача об отправке грузов

$I = \{1,\ldots, n\}$ — авиалайнеры, $J = \{1,\ldots, m\}$ — контейнеры,

p_{ij} — доход от доставки авиалайнером i контейнера j,
w_j — вес контейнера j,
c_i — вместимость авиалайнера i,
$x_{i,j} = 1, \textit{если отправить контейнер } j \textit{ авиалайнером } i, \textit{иначе } 0$

Модель

$$\max \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} p_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le 1, \quad j\in J,$$

$$\sum_{j\in J} w_j x_{ij} \le c_i, \quad i\in I,$$

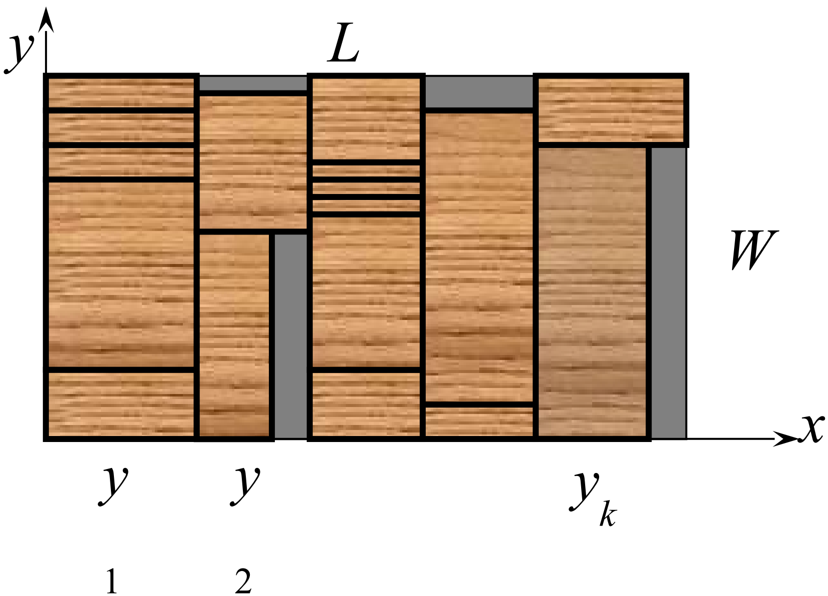
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i\in I, \quad j\in J.$$

Гильотинный раскрой материала

Дано**:** лист размера $L \times W$ и n-типов прямоугольников $l_j \times w_j$, $j=1,\ldots,n$

$p_j > 0$ — доход от прямоугольника j, повороты запрещены, разрезы параллельно осям координат от кромки до кромки. Двухстадийная обработка: сначала режем лист параллельно оси y, затем параллельно оси x.

Найти: раскрой листа с максимальным доходом



Пусть

k — число параллельных полос $k = \lfloor L / l_{\min} \rfloor$

y_i — ширина полосы i, $1 \le i \le k$,

x_{ij} — число j-х прямоугольников в полосе i,

$$x'_{i,j} = \begin{bmatrix} 1, \text{\textit{если}}\ x_{ij} > 0 \\ 0, \text{\textit{иначе}} \end{bmatrix}$$

$m_j = \lfloor W / w_j \rfloor$ — максимально возможное число j-х прямоугольников в полосе.

Модель:

$$\max \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \le W, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \le L,$$

$$l_j x'_{ij} \le y_i, \quad i = 1, \ldots k, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$m_j x'_{ij} \ge x_{ij}, \quad i = 1, \ldots k, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x'_{ij} \in \{0, 1\}, \quad x_{ij} \in \{0, \ldots, m_j\}, \quad y_i \ge 0.$$

Математические модели и методы принятия решений как основные компоненты исследования операций

Математическая модель - объективная формализация основных аспектов решаемой задачи или ее описание в математических терминах.

Математическая модель описывает исследуемую систему и позволяет выразить степень качества ее характеристик (эффективность функционирования) в виде *целевой функции*

$$W = f(X,Y),$$

где $X = (x_1,\ldots, x_n)$ — управляемые переменные,

$Y = (y_1,\ldots, y_m)$ — неуправляемые переменные (исходные данные).

Связь между переменными X и исходными данными Y выражается с помощью ограничений

$$\varphi\,(X, Y) \le 0.$$

При принятии решений применяют весь арсенал *методов современной прикладной математики*. Они используются для оценки ситуации и прогнозирования при выборе целей, для генерирования множества возможных вариантов решений и выбора из них лучшего.

В случае многокритериальности задачи используются

- методы замены, свертки, ранжирования критериев,
- имитационное моделирование,
- метод статистических испытаний (Монте-Карло),
- модели надежности и массового обслуживания,
- статистические (эконометрические) методы (методы выборочных обследований).
- вероятностно-статистические модели,
- методы анализа данных.

Особого внимания заслуживают проблемы неопределенности и риска, связанные как с природой, так и с поведением людей.

Различные способы описания неопределенностей:

- вероятностные модели,
- теория нечеткости,
- интервальная математика.

Для описания конфликтов (конкуренции) полезна теория игр.

Для структуризации рисков используют деревья причин и последствий.

В последние годы все большую популярность получает *контроллинг* — современная концепция системного управления организацией, в основе которой лежит стремление обеспечить ее долгосрочное эффективное существование.

Заключение

Овладение методами постановки задач принятия решений позволяет оптимизировать подход к решению задач обоснования оперативно-технических требований, разработки структуры системы связи, системы управления ею и распределения ресурсов системы между ее элементами.