ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА

О.С. Когновицкий, А.Н. Глухов
М.С. Новодворский, Л.В. Федотова

Построение циклического (n, k)-кода

Методические указания к лабораторной работе

210400, 210401, 210404
210406, 230102, 230105

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2006

ПОСТРОЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО (n, k)-КОДА

Цель работы

Изучение принципа формирования комбинаций избыточного циклического (n, k)-кода, метода обнаружения и исправления ошибок в принятой комбинации и построение кодирующего и декодирующего устройств.

Основные сведения о циклических кодах

Двоичный код – сочетание единиц и нулей, соответствующих определенному символу или цифре, которую надо передать.

При передаче кодовой комбинации по каналу связи она может быть изменена из-за искажений в канале передачи данных.

Простой код характеризуется тем, что отдельные его кодовые комбинации могут отличаться друг от друга лишь одним разрядом, поэтому даже один ошибочно принятый разряд приводит к замене одной кодовой комбинации другой и, следовательно, к неправильному приему сообщения в целом.

Одним из методов борьбы с ошибками является введение избыточности (добавляются проверочные разряды). Например, при 5-элементном простом коде МТК-2 число кодовых комбинаций $2^5 = 32$, а при избыточном кодировании с одним добавочным разрядом число кодовых комбинаций равно $2^6 = 64$.

Введение дополнительных разрядов уменьшает информационную скорость передачи, измеряемую в бит/с.

В избыточных (корректирующих или помехоустойчивых) кодах для передачи информации используется лишь часть кодовых комбинаций (разрешенные комбинации), отличающихся друг от друга более, чем в одном разряде. Все остальные комбинации не используются для передачи и относятся к числу неразрешенных (запрещенных). В процессе передачи разрешенных комбинаций возможен переход их в запрещенные. Избыточный код позволяет обнаружить этот переход, т. е. обнаружить ошибку.

Важной характеристикой кода является минимальное кодовое расстояние $d_{\min}$ между различными парами кодовых комбинаций, определяемое как число разрядов в которых эти комбинации отличаются друг от друга.

Для простых (безызбыточных) кодов $d_{\min} = 1$.

Минимальное кодовое расстояние $d_{\min}$ связано с числом или кратностью обнаруживаемых σ и исправляемых t ошибок следующим образом:

$$\begin{cases} d_{\min} \geq \sigma + 1, \\ d_{\min} \geq 2t + 1. \end{cases}$$

Кратность ошибки – количество разрядов, пораженных помехами в кодовой комбинации.

Нужно отметить, что d_{min} лишь частично характеризует корректирующие свойства кода, так как во многих случаях код обеспечивает обнаружение ошибок и более высокой кратности.

Избыточностью кода называется отношение r/n, где r – число проверочных разрядов; n – длина кодовой комбинации, а $(1 - r/n)$ называют скоростью кода.

Для исправления однократной ошибки ($t = 1$) число проверочных разрядов должно отвечать неравенству

$$r \geq \log_2(n + 1) \text{ или } 2^r \geq (n + 1). \qquad (1)$$

В общем случае, при исправлении ошибок кратности t, число проверочных разрядов должно отвечать неравенству:

$$r \geq \log_2\left(1 + \sum_{i=1}^{t} C_n^i\right), \text{ где } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Алгоритм формирования комбинаций циклического (*n*, *k*)-кода

При построении двоичных циклических кодов кодовые комбинации длины n принято представлять в виде полиномов степени $(n - 1)$:

$$F(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – коэффициенты, принимающие значения 0 или 1.

Например, кодовую комбинацию 1001101 можно записать в виде:

$$F(x) = x^6 + x^3 + x^2 + 1.$$

Поэтому циклические коды часто называют полиномиальными кодами.

Название циклического кода происходит от его основного свойства, заключающегося в том, что циклический сдвиг элементов разрешенной кодовой комбинации дает также разрешенную кодовую комбинацию, принадлежащую этому же циклическому коду (например, 1000111 → 0001111 → → 0011110 и т. д.). Другое свойство циклического кода состоит в том, что при суммировании по модулю два (mod 2) двух разрешенных кодовых комбинаций также образуется разрешенная кодовая комбинация.

Циклический код в его полиномиальном представлении можно определить как множество многочленов степени $(n - 1)$ и меньше, каждый из которых делится без остатка на некоторый многочлен $P(x)$ степени r, называемый образующим или порождающим многочленом кода.

Порождающий многочлен циклического кода, исправляющего однократные ошибки, должен быть неприводимым, т. е. не должен делиться ни на какой другой полином с двоичными коэффициентами и, как правило, должен быть примитивным [3].

Рассмотрим построение комбинации систематического циклического (n, k)-кода. Будем полагать, что порождающий многочлен задан. Алгоритм формирования циклического кода будет следующим:

1) $\boldsymbol{G(x)x^{(n-k)}}$, т. е. информационный полином $G(x)$ умножается на x в степени, равной степени порождающего многочлена $r = (n - k)$. Умножение полинома на x^r означает сдвиг на r разрядов влево.

2) $\dfrac{G(x)x^{(n-k)}}{P(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{P(x)}$, т. е. произведение $G(x)x^{(n-k)}$ делится на порождающий многочлен $P(x)$ и определяется частное $Q(x)$ и остаток от деления $R(x)$. Степень $R(x)$ всегда ниже степени порождающего многочлена.

3) $\boldsymbol{F(x) = G(x)x^{(n-k)} \oplus R(x)}$, т. е. комбинация циклического кода строится как совокупность информационных элементов и приписанных к ним со стороны младших разрядов элементов остатка (проверочных элементов).

Рассмотрим пример построения циклического кода для информационного полинома вида $G(x) = x^4 + x^2 + x$. Этот информационный полином $G(x)$ соответствует двоичной кодовой комбинации 10110.

Пусть порождающий многочлен имеет вид: $P(x) = x^4 + x + 1$. В соответствии с (1) максимальная длина кодовой комбинации циклического кода $n = 2^r - 1$ равна 15 (полный код). Однако на практике часто выбирают длину комбинации $n_1 < 2^r - 1$. Образующийся при этом циклический код называют укороченным. Следует иметь в виду, что укорочение происходит за счет уменьшения числа информационных разрядов k.

Корректирующая способность укороченного циклического кода не ниже корректирующей способности исходного полного циклического кода. Техника кодирования и декодирования в обоих случаях одна и та же. Однако циклический сдвиг элементов разрешенной кодовой комбинации укороченного циклического кода не всегда приводит к образованию разрешенной кодовой комбинации, поэтому укороченные коды относят к числу псевдоциклических.

В нашем примере разрядность исходного кода (информационного полинома $G(x)$) равна 5. Число проверочных разрядов определяется степенью порождающего многочлена (у нас – это 4). В итоге разрядность комбинации циклического кода равна 9, т. е. мы получим укороченный код (9, 5).

Выполним первую операцию построения систематического циклического кода – умножения на x^4 информационного полинома $G(x)$. Получим полином $G(x)x^4 = x^8 + x^6 + x^5$.

Умножению информационного полинома $G(x)$ на x^4 соответствует добавление справа четырех нулей к двоичному представлению $G(x)$, т. е. 101100000.

Вторая операция – деление $G(x)x^4$ на порождающий многочлен $P(x)$:

$$
\begin{array}{l}
\oplus\ \dfrac{x^8+x^6+x^5}{x^8+x^5+x^4} \quad \Big| \ \dfrac{x^4+x+1}{x^4+x^2+1=Q(x)} \\
\qquad \oplus\ \dfrac{x^6+x^4}{x^6+x^3+x^2} \\
\qquad\qquad \oplus\ \dfrac{x^4+x^3+x^2}{x^4+x+1} \\
\qquad\qquad\qquad x^3+x^2+x+1=R(x),
\end{array}
$$

где $R(x)$ – остаток от деления.

Здесь операция вычитания заменяется операцией сложения по mod 2. Операция суммирования по mod 2 выполняется по следующему алгоритму:

$$\mathbf{1\oplus 1=0;\ 0\oplus 0=0;\ 1\oplus 0=1;\ 0\oplus 1=1}$$

Та же операция деления в двоичном коде имеет вид

$$
\begin{array}{l}
\oplus\ \dfrac{101100000}{10011} \quad \Big| \ \dfrac{10011}{10101} \\
\quad \oplus\ \dfrac{010100}{10011} \\
\qquad \oplus\ \dfrac{011100}{10011} \\
\qquad\quad 1111=R(x)
\end{array}
$$

Третья операция – построение комбинации циклического кода $F(x)$:

$$F(x)=G(x)x^{(n-k)}\oplus R(x)=\underbrace{x^8+x^6+x^5}_{G(x)x^4}+\underbrace{x^3+x^2+x+1}_{R(x)}$$

Полученный результат в двоичном коде имеет вид:

$$\underbrace{10110}_{G(x)}\ \underbrace{1111}_{R(x)}$$

Сделаем проверку полученного циклического кода, представленного полиномом $F(x)$, делением этого полинома на порождающий многочлен $P(x)$. Остаток от деления должен быть нулевым.

$$
\begin{array}{rl|l}
\oplus & x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1 & x^4+x+1 \\
 & \underline{x^8+x^5+x^4} & \overline{x^4+x^2+1} \\
\oplus & x^6+x^4+x^3+x^2+x+1 & \\
 & \underline{x^6+x^3+x^2} & \\
\oplus & x^4+x+1 & \\
 & \underline{x^4+x+1} & \\
 & R(x)=0 &
\end{array}
$$

Та же операция в двоичном коде:

$$
\begin{array}{rl|l}
\oplus & 101101111 & 10011 \\
 & \underline{10011} & \overline{10101} \\
\oplus & 010111 & \\
 & \underline{10011} & \\
 & 010011 & \\
\oplus & \underline{10011} & \\
 & R(x)=0 &
\end{array}
$$

Итак, для заданного информационного кода $G(x)$ разрядностью 5 получен укороченный циклический код разрядностью 9, т. е. код $(n, k) = (9, 5)$. Минимальное кодовое расстояние (расстояние Хэмминга) для этого кода равно $d_{\min} = 3$, т. е. он позволяет обнаруживать все ошибки кратностью $\sigma \le 2$ или исправлять однократные ошибки ($t = 1$). В режиме обнаружения данный код может обнаруживать и часть ошибок более высокой кратности.

Общее число кодовых комбинаций рассматриваемого кода $N_{\text{общ}} = 2^9 = 512$; число разрешенных кодовых комбинаций $N_{\text{разр}} = 2^5 = 32$; число запрещенных кодовых комбинаций $N_{\text{запр}} = N_{\text{общ}} - N_{\text{разр}} = 480$.

Избыточность данного кода равна $\dfrac{r}{n} = \dfrac{4}{9} = 0{,}4(4)$, а кодовая скорость – $\left(1 - \dfrac{r}{n}\right) = \dfrac{5}{9} = 0{,}5(5)$.

Для получения всех ненулевых разрешенных комбинаций (для кода (9,5) – это $2^5 - 1 = 31$) составляют порождающую матрицу $\mathbf{G}_{n,k}$ называемую также образующей или производящей матрицей, которая состоит из единичной матрицы $\mathbf{I}_{k,k}$ размерности k,k (для кода (9,5) – это 5,5) и матрицы $\mathbf{R}_{k,\,n-k}$ проверочных элементов размерности k, $n-k$ (для кода (9,5) – это 5, 4).

Единичная матрица имеет вид

$$\mathbf{I}_{5,5}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Для нахождения строк матрицы $\mathbf{R}_{k,\,n-k}$ проверочных элементов выполняется деление многочлена вида x^n на порождающий многочлен. Полученные на каждом шаге деления остатки и являются строками проверочной матрицы $\mathbf{R}_{k,\,n-k}$. Пример получения проверочных элементов для кода (9,5) и порождающего многочлена $P(x)$=10011 имеет вид

$$\begin{array}{l|l}
\,100000000 & 10011 \\ \cline{2-2}
\oplus\,10011 & 10011 \\ \cline{1-1}
\,\quad 00110 & \\
\oplus\,\quad 00000 & \\ \cline{1-1}
\,\qquad 01100 & \\
\oplus\,\qquad 00000 & \\ \cline{1-1}
\,\qquad\; 11000 & \\
\oplus\,\qquad\; 10011 & \\ \cline{1-1}
\,\qquad\quad 10110 & \\
\oplus\,\qquad\quad 10011 & \\ \cline{1-1}
\,\qquad\qquad 0101 &
\end{array}$$

Порождающая матрица для рассматриваемого примера будет иметь вид

$$\mathbf{G}_{9,5}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\0&1&0&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\0&0&1&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\0&0&0&1&0&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\0&0&0&0&1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Каждая строка этой матрицы является разрешенной кодовой комбинацией кода (9,5). Для получения остальных разрешенных кодовых комбинаций необходимо каждую строку матрицы $\mathbf{G}_{9,5}$ сложить по mod 2 с каждой строкой, затем с двумя строками, с тремя и т. д. Например, сложение первой строки со второй даст разрешенную комбинацию 110001110, сложение всех пяти строк – 111110111.

Для определения минимального кодового расстояния $d_{\min}$ циклического кода (n, k) следует составить его проверочную матрицу $\mathbf{H}_{n,\,k}$, которая получается путем транспонирования (замены местами строк и столбцов) матрицы проверочных элементов $\mathbf{R}_{k,\ n-k}$ с последующим дописыванием справа элементов единичной матрицы размерностью $k,\ n-k$. В нашем случае проверочная матрица циклического кода (9,5) имеет вид

$$\mathbf{H}_{9,5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & * & & & * & * \end{array}$$

Минимальное кодовое расстояние $d_{\min}$ равно минимальному числу столбцов, построчная сумма по mod 2 элементов которых дает нулевой столбец.

При наличии двух одинаковых столбцов в проверочной матрице $\mathbf{H}_{n,\ k}$ минимальное кодовое расстояние $d_{\min} = 2$, а при их отсутствии – $d_{\min} \geq 3$ и определяется путем перебора.

Для кода (9,5) минимальное число столбцов, дающее при построчном суммировании по mod 2 нулевой столбец, равно трем (эти столбцы отмечены знаком (*) в матрице $\mathbf{H}_{n,\ k}$). Следовательно, минимальное кодовое расстояние циклического кода (9,5) $d_{\min} = 3$, что позволяет ему гарантированно исправить однократную или обнаружить двукратную ошибку.

Структурная схема кодирующего устройства

1. Кодирующее устройство строится в соответствии с видом порождающего многочлена $P(x)$ и представляет собой регистр сдвига с логическими обратными связями через сумматоры по mod 2.

2. Число ячеек памяти (разрядов) в регистре сдвига равно степени порождающего многочлена $P(x)$ (в нашем случае – 4, T1 – младший разряд, T4 – старший разряд).

3. Количество сумматоров по mod 2 равно весу порождающего многочлена $P(x)$ минус единица. В нашем примере вес $P(x)$ равен 3, значит, число сумматоров по mod 2 равно 2.

4. Сумматоры по mod 2 ставятся перед ячейками памяти, соответствующими ненулевым членам порождающего многочлена $P(x)$, исключая его младшую и старшую степень. Кроме того, на выходе регистра включается дополнительный сумматор, реализующий доумножение информационного полинома $G(x)$ на x^{n-k}.

Структурная схема кодирующего устройства для кода (9,5) и порождающего многочлена $P(x) = x^4 + x + 1$, построенная в соответствии с указанными правилами, приведена на рис. 1.

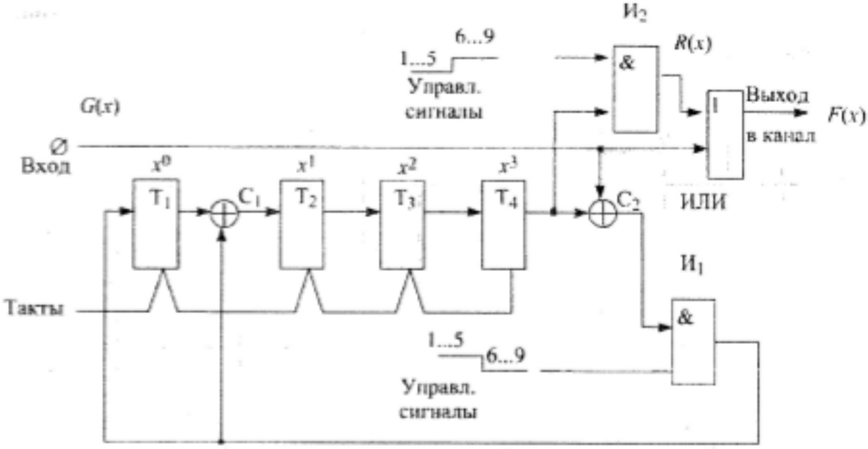

Рис.1. Структурная схема кодера циклического кода (9,5) для $P(x) = x^4 + x + 1$

В представленной схеме кодера имеется 4 триггера: T_1, T_2, T_3 и T_4, в качестве ячеек памяти, и 2 сумматора по mod 2: C_1 и C_2, а также два ключа, роль которых выполняют схемы $И_1$ и $И_2$, и схема ИЛИ. Схема тактируемая.

Схема кодера работает следующим образом.

Кодовая комбинация, представленная информационным полиномом $G(x)$, поступает на сумматор C_2, что реализует операцию умножения $G(x)$ на x^4. Получаемое на выходе сумматора C_2 произведение $x^4G(x)$ далее делится на порождающий многочлен $P(x)$, что реализуется с помощью обратных связей через схему $И_1$. Пока поступает информационная кодовая комбинация $G(x)$, т. е. в нашем случае с 1-го по 5-й такты, схема $И_1$ открыта, а схема $И_2$ закрыта, вследствие чего информационные элементы поступают на выход кодера через схему ИЛИ. После k тактов, где k – число информационных разрядов, ключ $И_1$ размыкается, а ключ $И_2$ замыкается и из регистра сдвига в последующие такты с 6-го по 9-й через схему $И_2$ остаток от деления $R(x)$ выводится в канал связи. Состояние триггеров на каждом такте работы схемы для $G(x) = x^4 + x^2 + x$ показано в табл.1.

Подробнее описание работы устройства кодирования приведено в приложении.

Таблица 1

Такты	Вход $G(x)$	T_1	T_2	T_3	T_4	Выход $F(x)$
1	**1**	1	1	0	0	**1**
2	**0**	0	1	1	0	**0**
3	**1**	1	1	1	1	**1**
4	**1**	0	1	1	1	**1**
5	**0**	1	1	1	1	**0**
6	-	0	1	1	1	**1**
7	-	0	0	1	1	**1**
8	-	0	0	0	1	**1**
9	-	0	0	0	0	**1**

Принципы обнаружения и исправления ошибок в принятой кодовой комбинации циклического кода

Переданная кодовая комбинация двоичного циклического кода, представленная полиномом $F(x)$, из-за искажений единичных элементов в каналах связи может быть принята с ошибками и иметь вид некоторого полинома $H(x)$. Если просуммировать по mod 2 одноименные разряды $F(x)$ и $H(x)$, то получим

$$F(x) \oplus H(x) = E(x),$$

где $E(x)$ – полином ошибок.

Разрядность полинома ошибок такая же, как и разрядность комбинации $F(x)$ циклического кода. При этом ненулевые разряды в $E(x)$ указывают на ошибочные элементы в принятой кодовой комбинации $H(x)$. При отсутствии ошибок полином $E(x)$ состоит из одних нулей.

Принимая во внимание вышеприведенные обозначения, принятую кодовую комбинацию можно представить следующим образом:

$$H(x) = F(x) \oplus E(x).$$

Для обнаружения ошибок в принятой кодовой комбинации следует разделить $H(x)$ на порождающий многочлен $P(x)$. Результат деления укажет на наличие или отсутствие ошибки в принятой кодовой комбинации $H(x)$. Если деление дает нулевой остаток, то ошибки отсутствуют или не обнаружены. Если же в результате деления полинома $H(x)$ на порождающий многочлен $P(x)$ остаток $R'(x)$ отличен от нуля, то это означает что принятая кодовая комбинация $H(x)$ содержит ошибки (рис. 2).

$$\frac{H(x)}{P(x)} \Rightarrow R'(x) = S(x) \begin{cases} = 0 \begin{cases} \text{Ошибки нет} \\ \text{Ошибка не обнаружена} \end{cases} \\ \neq 0 \quad \text{Ошибка обнаружена} \end{cases}$$

Рис. 2. Схема выявления ошибок в принятой кодовой комбинации $H(x)$

Вид ненулевого остатка $R'(x)$, называемого синдромом ошибки $S(x)$, имеет однозначное соответствие с ошибочным разрядом и видом полинома однократной ошибки $E(x)$ для всех кодовых комбинаций $H(x)$ циклического кода. Например, для циклического кода (9,5) при заданном порождающем многочлене $P(x) = x^4 + x + 1$ остаток $R'(x)$ всегда будет иметь вид $S(x) = 0011$, если ошибка возникла в пятом разряде входной кодовой комбинации, т. е. в младшем информационном разряде, независимо от вида переданной кодовой комбинации $F(x)$.

Следует отметить, что остаток $R'(x)$, получаемый при делении полинома $H(x)$ на порождающий многочлен $P(x)$, имеет такой же вид, как и остаток от деления $E(x)$ на $P(x)$, поскольку полином $F(x)$ делится на $P(x)$ без остатка.

Кратность обнаруживаемых ошибок в принятой кодовой комбинации циклического кода определяется минимальным кодовым расстоянием $d_{\min}$ этого кода. Для циклического кода (9,5) значение $d_{\min} = 3$, что обеспечивает **гарантированное** обнаружение всех однократных и двукратных ошибок. Кроме того, код позволяет обнаруживать часть ошибок более высокой кратности, начиная с веса, равного $d_{\min}$ и более. Код не обнаруживает ошибки, если полином ошибки имеет вид разрешенной кодовой комбинации.

Для исправления однократной ошибки в принятой кодовой комбинации $H(x)$ необходимо определить место ошибки. С этой целью также производится деление полинома $H(x)$ на порождающий многочлен $P(x)$. Для определенности вновь обратимся к коду (9,5). Если на 9-м такте в регистре-делителе (декодирующем регистре) будет зафиксирована хотя бы одна единица, то деление продолжается до тех пор, пока в регистре-делителе не будет зафиксирована «особая» кодовая комбинация. Вид этой комбинации зависит только от вида порождающего многочлена $P(x)$ и длины n комбинации циклического кода $F(x)$, причем находится «особая» кодовая комбинация как остаток от деления x^n на $P(x)$ [3]. В нашем случае для кода (9,5) и порождающего многочлена $P(x) = x^4 + x + 1$ «особая» кодовая комбинация всегда имеет вид 1010.

$$
\begin{array}{r|l}
\oplus \begin{array}{l} x^9 \\ x^9 + x^6 + x^5 \end{array} & \begin{array}{l} x^4 + x + 1 \\ \hline x^5 + x^2 + x \end{array} \\
\hline
\oplus \begin{array}{l} x^6 + x^5 \\ x^6 + x^3 + x^2 \end{array} & \\
\hline
\oplus \begin{array}{l} x^5 + x^3 + x^2 \\ x^5 + x^2 + x \end{array} & \\
\hline
x^3 + x \Rightarrow 1010 &
\end{array}
$$

Номер такта, на котором в регистре-делителе возникает «особая» кодовая комбинация, указывает место ошибочного разряда в принятой кодовой комбинации $H(x)$. При считывании этой комбинации из буферного регистра ошибочный разряд должен быть исправлен (инвертирован).

Циклический код (9,5) гарантированно исправляет только однократные ошибки. Ошибки более высокой кратности код (9,5) не исправляет.

Заметим также, что деление полинома $H(x)$ на многочлен $P(x)$ и считывание информации из буферного регистра после 9-го такта целесообразно осуществлять под действием «быстрых» тактовых импульсов. Это позволит без задержки принять из канала связи и обработать следующую кодовую комбинацию $H(x)$.

Декодирующее устройство циклического кода (9, 5), обеспечивающее обнаружение ошибок

Структурная схема декодера строится по тем же правилам, что и кодера. В состав декодера циклического кода (9,5), обнаруживающего все однократные и двукратные, а также ряд ошибок более высокой кратности в принятой кодовой комбинации $H(x)$, входят: буферный регистр на 9 разрядов, декодирующий регистр (регистр-делитель), схема ИЛИ–НЕ, схема И, а также управляющее устройство, замыкающее ключ К после 9-го такта (на схеме устройство не показано) (рис. 3). На вход декодирующего регистра поступает кодовая комбинация $H(x)$, которая делится на порождающий многочлен $P(x)$.По окончании деления, после 9 тактов, в триггерах Т1…Т4 декодирующего регистра декодера записывается остаток от деления. Если при этом хотя бы один из триггеров Т1…Т4 находится в единичном состоянии, то это означает, что в принятой кодовой комбинации $H(x)$ имеется ошибка. На выходе схемы ИЛИ–НЕ формируется нулевой сигнал, который при замкнутом ключе К поступает на второй вход схемы И. На первый же вход этой схемы И поступает кодовая комбинация $H(x)$ из буферного регистра декодера циклического кода под воздействием формируемых в тактовой цепи «быстрых» тактов (с 10-го по 14-й), в течение которых на вход кодера подается нулевой сигнал. Под действием нулевого сигнала с выхода схемы ИЛИ-НЕ схема И запирается и кодовая комбинация $H(x)$ не поступает из буферного регистра на выход схемы декодера.

Если же все триггеры Т1…Т4 декодирующего регистра декодера обнулены после 9-го такта, то на выходе схемы ИЛИ–НЕ с 10-го по 14-й «быстрые» такты имеет место единичный сигнал. Тогда схема И пропускает на выход декодера безошибочно принятую (или с необнаруженными ошибками) кодовую комбинацию из буферного регистра, причем потребителю направляются первые пять разрядов, составляющих информационную кодовую комбинацию $G(x)$.

Наглядной иллюстрацией работы декодирующего регистра декодера могут служить таблицы состояний его триггеров. В качестве примера такие таблицы даны для комбинации циклического кода $F(x)$ = 101101111 в случае, когда ошибок нет (табл. 2); и в случае, когда ошибка произошла во 2-м разряде (табл. 3); во 2 и 3-м разрядах (табл. 4); в 1, 3 и 5-м разрядах (табл. 5) и в 1, 4 и 5-м разрядах (табл. 6).

$H(x)$ = 101101111; $E(x)$ = 000000000

Таблица 2

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе схемы ИЛИ-НЕ	Информация на выходе декодера
		Т1	Т2	Т3	Т4	после 9-го такта	
1	**1**	1	0	0	0		
2	**0**	0	1	0	0		
3	**1**	1	0	1	0		
4	**1**	1	1	0	1		
5	**0**	1	0	1	0		
6	1	1	1	0	1		
7	1	0	0	1	0		
8	1	1	0	0	1		
9	1	0	0	0	0		
10	–	0	0	0	0	1	**1**
11	–	0	0	0	0	1	**0**
12	–	0	0	0	0	1	**1**
13	–	0	0	0	0	1	**1**
14	–	0	0	0	0	1	**0**

Таким образом, как видно из табл. 2, в случае отсутствия ошибок в принятой кодовой комбинации $H(x)$, на выходе декодера формируется пятиразрядная кодовая комбинация $G(x)$.

Примечание. После записи входной кодовой комбинации в буферный регистр на вход кодера, с 10-го по 14-й такты включительно, поступает логический ноль.

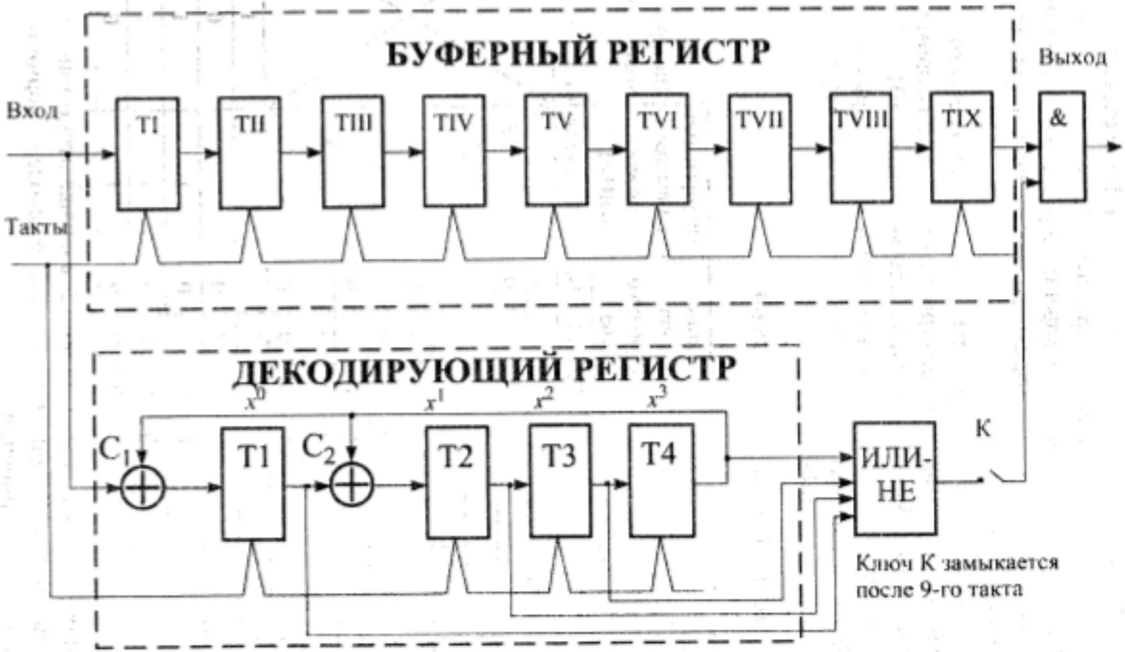

Рис. 3. Схема декодера циклического кода (9,5), обнаруживающего ошибки в принятой кодовой комбинации $H(x)$, построенная для $P(x) = x^4 + x + 1$

$H(x)$ = 111101111; $E(x)$ = 010000000

Таблица 3

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе схемы ИЛИ-НЕ	Информация на выходе декодера
		Т1	Т2	Т3	Т4	после 9-го такта	
1	**1**	1	0	0	0		
2	**1**	1	1	0	0		
3	**1**	1	1	1	0		
4	**1**	1	1	1	1		
5	**0**	1	0	1	1		
6	1	0	0	0	1		
7	1	0	1	0	0		
8	1	1	0	1	0		
9	1	←	1	0	1		
10	–	1	0	1	0	0	–
11	–	0	1	0	1	0	–
12	–	1	1	1	0	0	–
13	–	0	1	1	1	0	–
14	–	1	1	1	1	0	–

Итак, как видно из табл. 3, декодер обнаруживает ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$ (см. комбинацию синдрома ошибки $S(x)$ = 1011, зафиксированную на 9-м такте в декодирующем регистре) и блокирует выдачу информации потребителю из буферного регистра.

Примечание. Горизонтальная стрелка в таблице (здесь и в последующих таблицах) указывает направление от старшего к младшему разряду кодовой комбинации.

$H(x) = 110101111$; $E(x) = 011000000$

Таблица 4

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе схемы ИЛИ-НЕ	Информация на выходе декодера
		T1	T2	T3	T4	после 9-го такта	
1	**1**	1	0	0	0		
2	**1**	1	1	0	0		
3	**0**	0	1	1	0		
4	**1**	1	0	1	1		
5	**0**	1	0	0	1		
6	1	0	0	0	0		
7	1	1	0	0	0		
8	1	1	1	0	0		
9	1	1	1	1	0		
10	–	0	1	1	1	0	–
11	–	1	1	1	1	0	–
12	–	1	0	1	1	0	–
13	–	1	0	0	1	0	–
14	–	1	0	0	0	0	–

Из табл. 4 следует, что декодер обнаруживает двукратную ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$ и блокирует выдачу информации потребителю из буферного регистра.

$H(x) = 000111111$; $E(x) = 101010000$

Таблица 5

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе схемы ИЛИ-НЕ	Информация на выходе декодера
		T1	T2	T3	T4	после 9-го такта	
1	**0**	0	0	0	0		
2	**0**	0	0	0	0		
3	**0**	0	0	0	0		
4	**1**	1	0	0	0		
5	**1**	1	1	0	0		
6	1	1	1	1	0		
7	1	1	1	1	1		
8	1	0	0	1	1		
9	1	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~		
10	–	1	1	1	0	0	–
11	–	0	1	1	1	0	–
12	–	1	1	1	1	0	–
13	–	1	0	1	1	0	–
14	–	1	0	0	1	0	–

Как видно из табл. 5, декодер обнаруживает данную трехкратную ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$ и блокирует выдачу информации потребителю из буферного регистра.

$H(x) = 001011111$; $E(x) = 100110000$

Таблица 6

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе схемы ИЛИ-НЕ	Информация на выходе декодера
		T1	T2	T3	T4	после 9-го такта	
1	**0**	0	0	0	0		
2	**0**	0	0	0	0		
3	**1**	1	0	0	0		
4	**0**	0	1	0	0		
5	**1**	1	0	1	0		
6	1	1	1	0	1		
7	1	0	0	1	0		
8	1	1	0	0	1		
9	1	0	0	0	0		
10	–	0	0	0	0	1	**0**
11	–	0	0	0	0	1	**0**
12	–	0	0	0	0	1	**1**
13	–	0	0	0	0	1	**0**
14	–	0	0	0	0	1	**1**

Таким образом, представленные в табл. 6 данные свидетельствуют о том, что декодер не в состоянии обнаружить указанную трехкратную ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$ и выдаёт потребителю кодовую комбинацию со всеми ошибками, т. е. комбинацию 00101.

Структурная схема декодирующего устройства циклического кода (9,5), обеспечивающего исправление однократной ошибки в принятой кодовой комбинации $H(x)$

Схема декодера строится аналогично предыдущему случаю и осуществляет операцию деления $H(x)$ на порождающий многочлен $P(x)$ (рис. 4). Регистр деления (декодирующий регистр) имеет число сумматоров, равное весу многочлена $P(x)$ минус один. Включаются сумматоры, как показано на рисунке, перед ячейками, соответствующими слагаемым многочлена $P(x)$, исключая старшую степень $x^{n-k} = x^4$. Как отмечалось ранее, в триггерах декодирующего регистра декодера на 9-м такте оказывается записанной в обратном порядке кодовая комбинация – синдром ошибки $S(x)$.

Если ошибка имела место в 1-м (старшем) разряде принятой кодовой комбинации, то после 10-го такта в ячейках регистра T1…T4 будет записана «особая» кодовая комбинация 1010. При ошибке во втором разряде комбинации $H(x)$ «особая» кодовая комбинация будет сформирована после одиннадцатого такта. Соответственно, при ошибке в 3-м разряде принятой кодовой комбинации $H(x)$ «особая» кодовая комбинация будет сформирована уже после двенадцатого такта. И так далее, вплоть до четырнадцатого такта, включительно. При этом следует помнить, что такты с 10-го по14-й являются «быстрыми».

Сигналы с выходов триггеров Т1…Т4 поступают на вход дешифратора «особой» кодовой комбинации 1010, с выхода которого, после замыкания ключа К, сигнал поступает на второй вход сумматора C_3 по mod 2. Этот сигнал равен 0, если на входе дешифратора кодовая комбинация отлична от «особой» (1010), и равен 1, если эта комбинация совпадает с «особой».

При поступлении на сумматор C_3 сигнала 1 с выхода дешифратора «особой» кодовой комбинации на другой вход сумматора C_3 из буферного регистра будет поступать ошибочный разряд принятой кодовой комбинации $H(x)$, который инвертируется. В итоге однократная ошибка в принятой кодовой комбинации $H(x)$ исправляется, и информационная кодовая комбинация $G(x)$ – первые пять разрядов $H(x)$, с учетом исправления, направляется потребителю информации.

В табл. 7, 8 и 9 показано состояние триггеров декодирующего регистра сдвига в декодере циклического кода, исправляющего однократную ошибку. В качестве примера приведена кодовая комбинация циклического кода $F(x)$ = 101101111, причем табл. 7 относится к случаю, когда ошибка имела место в 3-м разряде, табл. 8 – к случаю, когда ошибка была в 3 и 4-м разрядах, а табл. 9 – к случаю, когда ошибка в 1 и 4-м разрядах, принятой кодовой комбинации $H(x)$.

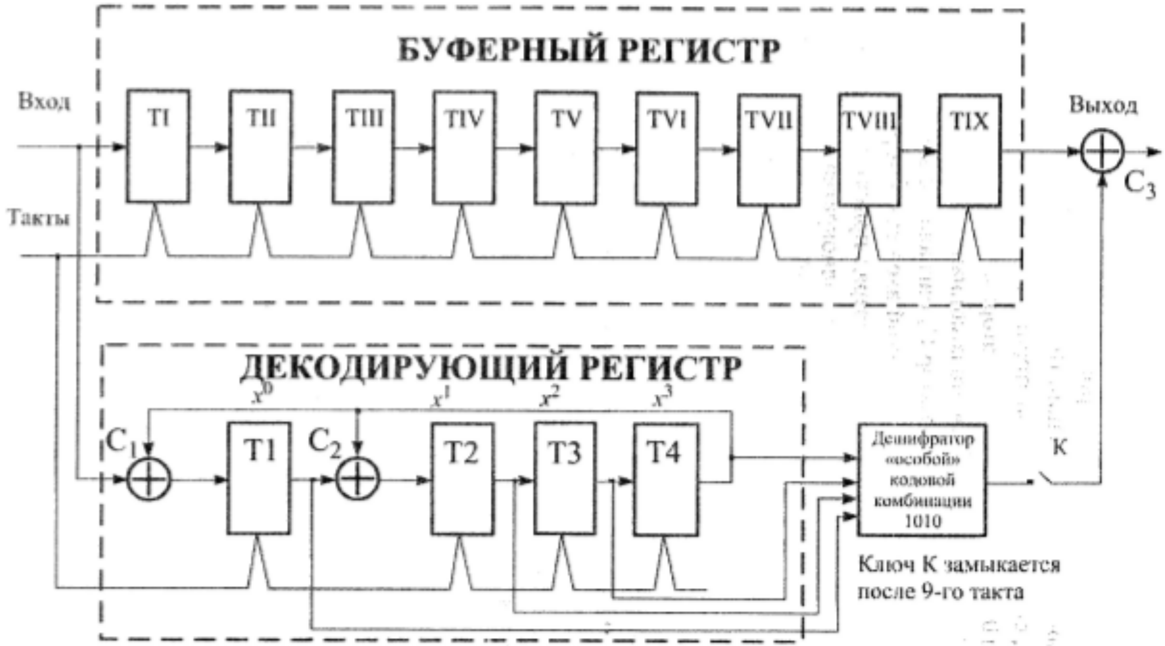

Рис. 4. Схема декодера циклического кода (9,5), исправляющего однократную ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$, построенная для $P(x) = x^4 + x + 1$

$H(x) = 100101111$; $E(x) = 001000000$

Таблица 7

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе дешифратора «особой» код. комбинации	Информация на выходе декодера
		T1	T2	T3	T4	после 9-го такта	
1	**1**	1	0	0	0		
2	**0**	0	1	0	0		
3	**0**	0	0	1	0		
4	**1**	1	0	0	1		
5	**0**	1	0	0	0		
6	1	1	1	0	0		
7	1	1	1	1	0		
8	1	1	1	1	1		
9	1	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~		
10	–	1	1	0	1	0	**1**
11	–	1	0	1	0	0	**0**
12	–	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	1	**1**
13	–	1	1	1	0	0	**1**
14	–	0	1	1	1	0	**0**

В итоге, как следует из табл. 7, декодер исправляет однократную ошибку, имевшую место в 3-м разряде принятой кодовой комбинации $H(x)$, и направляет потребителю информационную кодовую комбинацию $G(x)$ (первые пять разрядов $H(x)$, с учетом исправлений).

$H(x) = 100001111$; $E(x) = 001100000$

Таблица 8

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе дешифратора «особой» код. комбинации	Информация на выходе декодера
		T1	T2	T3	T4	после 9-го такта	
1	**1**	1	0	0	0		
2	**0**	0	1	0	0		
3	**0**	0	0	1	0		
4	**0**	0	0	0	1		
5	**0**	1	1	0	0		
6	1	1	1	1	0		
7	1	1	1	1	1		
8	1	0	0	1	1		
9	1	0	1	0	1		
10	–	1	1	1	0	0	**1**
11	–	0	1	1	1	0	**0**
12	–	1	1	1	1	0	**0**
13	–	1	0	1	1	0	**0**
14	–	1	0	0	1	0	**0**

Рассмотрение данных, представленных в табл. 8, показывает, что декодер циклического кода (9,5), не в состоянии исправить двукратную ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$, т. е. работа декодера в этом случае абсолютно неэффективна. Возможны также ситуации, когда декодер осуществляет ложные исправления при поступлении на его вход кодовой комбинации $H(x)$ с двукратной ошибкой (см. табл. 9) или с ошибками более высокой кратности.

$H(x) = 001001111$; $E(x) = 100100000$

Таблица 9

Такты (1–9) и «быстрые» такты (10–14)	Информация на входе декодера $H(x)$	Состояние триггеров декодирующего регистра				Информация на выходе дешифратора «особой» код. комбинации	Информация на выходе декодера
		T1	T2	T3	T4	после 9-го такта	
1	**0**	0	0	0	0		
2	**0**	0	0	0	0		
3	**1**	1	0	0	0		
4	**0**	0	1	0	0		
5	**0**	0	0	1	0		
6	1	1	0	0	1		
7	1	0	0	0	0		
8	1	1	0	0	0		
9	1	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~		
10	–	0	1	1	0	0	**0**
11	–	0	0	1	1	0	**0**
12	–	1	1	0	1	0	**1**
13	–	1	0	1	0	0	**0**
14	–	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	1	**1**

Анализируя данные, представленные в табл. 9, нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае, при двукратной ошибке в принятой кодовой комбинации $H(x)$, декодер не только не исправляет эту ошибку, но и производит ложное исправление, в результате чего на выход поступает кодовая комбинация с трехкратной ошибкой.

В заключение необходимо отметить, что рассмотренные в методических указаниях случаи обнаружения и исправления ошибок декодером циклического кода (9,5) не исчерпывают всего многообразия ситуаций, имеющих место на практике. Очевидно, что ошибки могут возникать не только в информационных, но и в проверочных разрядах принятой кодовой комбинации $H(x)$, а также – в тех и других разрядах одновременно. И хотя избыточные элементы, т. е. поверочные разряды кодовой комбинации $H(x)$, потребителю не передаются, ошибки в них могут влиять на качество работы декодера как в режиме обнаружения, так и исправления ошибок. При этом, наряду с правильными решениями, принимаемыми декодером, возможны решения неверные: когда ошибки в информационных разрядах кодовой комбинации $H(x)$ не будут обнаружены или когда из-за ошибок в проверочных разрядах безошибочно принятые информационные разряды не будут выданы потребителю, либо же в них дополнительно будут внесены ложные исправления.

Конкретное решение декодера циклического кода (9,5) всецело зависит от того, какова кратность ошибок в принятой кодовой комбинации $H(x)$ и как они распределены в ней между информационными и проверочными разрядами.

ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

1. Изучить принцип построения циклического (n, k)-кода и сформировать комбинацию $F(x)$ циклического кода (9,5) по заданной кодовой комбинации простого кода $G(x)$ и кодовой комбинации порождающего многочлена $P(x)$.

2. Построить схему кодера циклического кода (9,5) и составить таблицу состояний триггеров регистра сдвига.

3. Проверить у преподавателя на компьютере правильность заполнения таблицы состояний триггеров регистра сдвига кодирующего устройства.

4. Определить синдром ошибки для полученной комбинации циклического кода (9,5) по заданным полиномам однократных ошибок $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$ в кодовой комбинации простого кода $G(x)$ в составе $H(x)$. Сравнить полученные результаты с [1, с. 271, таблица].

5. По заданному порождающему многочлену $P(x)$ построить схему декодера циклического кода (9,5), **обнаруживающего** ошибки $E_i(x)$, где $i = 1,2$, в принятой кодовой комбинации $H(x)$.

6. Составить таблицу состояний триггеров декодирующего регистра при однократной $E_1(x)$, двукратной $E_1(x) \oplus E_2(x)$ и трехкратной $E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus E_3(x)$ ошибках. Зафиксировать синдромы ошибок и сравнить их с синдромами, приведенными в [1, с. 271, таблица]. Отметить факт обнаружения или необнаружения ошибок соответствующей кратности в кодовой комбинации простого кода $G(x)$.

7. По заданному порождающему многочлену $P(x)$ построить схему декодера циклического кода (9,5), **исправляющего** однократную ошибку $E_1(x)$ в принятой кодовой комбинации $H(x)$.

8. Составить таблицу состояний триггеров декодирующего регистра при однократной ошибке $E_1(x)$ в кодовой комбинации простого кода $G(x)$ в составе $H(x)$. Определить номер «быстрого» такта, на котором в декодирующем регистре будет сформирована «особая» кодовая комбинация 1010. Сравнить информацию на выходе декодера с безошибочной кодовой комбинацией простого кода $G(x)$.

9. Составить таблицу состояний триггеров декодирующего регистра при попытке декодера **исправить** двукратную $E_1(x) \oplus E_2(x)$ и трехкратную $E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus E_3(x)$ ошибки в кодовой комбинации простого кода $G(x)$ в составе $H(x)$. Убедиться в том, что двукратные и трехкратные ошибки в принятой кодовой комбинации $H(x)$ декодером не исправляются.

10. Проверить у преподавателя на компьютере правильность заполнения таблицы состояний триггеров декодирующего регистра, исправляющего однократную ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$.

11. Сформулировать выводы по лабораторной работе.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

• схему кодера циклического кода (9,5) для заданного порождающего многочлена $P(x)$ и кодовой комбинации простого кода $G(x)$;

• таблицу состояний триггеров регистра сдвига кодера;

• схему декодера, исправляющего однократную ошибку $E_1(x)$ в заданном разряде кодовой комбинации $H(x)$, и таблицу состояний триггеров декодирующего регистра этого декодера;

• схему декодера, обнаруживающего двукратную ошибку $E_1(x) \oplus E_2(x)$ в заданных разрядах кодовой комбинации $H(x)$, и таблицу состояний триггеров декодирующего регистра этого декодера.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение циклического кода и перечислить его свойства.

2. Какие кодовые комбинации циклического кода (9,5) относятся к «разрешенным», а какие – к «запрещенным». Сколько тех и других?

3. Как строится порождающая матрица циклического кода (9,5) и как ею пользоваться при определении «разрешенных» кодовых комбинаций?

4. Каковы корректирующие свойства циклического кода (9,5), чем они определяются? Чему равно минимальное кодовое расстояние циклического кода (9,5)?

5. Как скажется на корректирующей способности циклического кода переход от полного кода к укороченному?

6. Как строится проверочная матрица циклического кода (9,5) и как ею пользоваться при определении минимального кодового расстояния?

7. Сформулировать алгоритм построения комбинации $F(x)$ циклического (n, k)-кода.

8. Перечислить критерии выбора порождающего многочлена $P(x)$ при построении циклического кода (9,5), исправляющего однократные или обнаруживающего однократные и двукратные ошибки.

9. В чем суть принципов обнаружения однократных и двукратных ошибок в принятой кодовой комбинации $H(x)$?

10. В чем суть принципов исправления однократных ошибок в принятой кодовой комбинации $H(x)$?

11. Сформулировать правило построения структурной схемы кодера циклического кода по заданному порождающему многочлену $P(x)$.

12. Построить схему кодера циклического кода (9,5) для порождающего многочлена $P(x) = x^4 + x^3 + 1$ или $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

13. Сформулировать принципы построения структурной схемы декодера циклического кода, **обнаруживающего** однократные и двукратные ошибки в принятой кодовой комбинации $H(x)$.

14. Сформулировать принципы построения структурной схемы декодера циклического кода, **исправляющего** однократную ошибку в принятой кодовой комбинации $H(x)$.

15. Указать, от чего зависит и как определяется вид «особой» кодовой комбинации, используемой при исправлении однократной ошибки в принятой кодовой комбинации $H(x)$.

16. Доказать, почему «особая» кодовая комбинация представляет собой остаток от деления x^n на $P(x)$.

17. В чем смысл использования «быстрых» тактовых импульсов в схеме декодера циклического кода (9,5)?

18. Отметить, на каком «быстром» такте формируется «особая» кодовая комбинация в декодирующем регистре, если в принятой кодовой комбинации $H(x)$ однократная ошибка имела место в первом (втором, третьем, четвертом или пятом) информационном разряде циклического кода (9,5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Передача дискретных сообщений: Учебник для вузов / Под ред. В.П. Шувалова. М.: Радио и связь, 1990. С. 271,272, 283 – 286.

2. Гуров В.С., Емельянов Г.А., Етрухин Н.Н., Осипов В.Г. Передача дискретной информации и телеграфия: Учебник для вузов связи. М.: Связь, 1974. С. 378 – 382.

3. Когновицкий О.С. Основы циклических кодов: Учеб. пособие / ЛЭИС. Л., 1990.

АЛГОРИТМ РАБОТЫ КОДЕРА ЦИКЛИЧЕСКОГО КОДА (9,5)

Наглядным отображением процессов, происходящих от такта к такту в схеме цифрового кодера циклического кода (9,5), может служить табл. 1 состояний триггеров этого кодера. Она приведена для случая, когда исходная информационная кодовая комбинация $G(x)$ имеет вид **10110**, а порождающий многочлен $P(x)$ представлен комбинацией **10011** (или $P(x) = x^4 + x + 1$). Поясним, как заполняется таблица состояний.

Обратимся к схеме кодера циклического кода (9,5). Перед началом работы схемы, в исходном состоянии, все четыре триггера Т1, Т2, Т3, Т4 обнулены, т. е. в каждом из них записан сигнал **0**. В процессе работы кодера, с первого по пятый такт включительно, на схему $И_2$ подается управляющий сигнал низкого уровня, т. е. сигнал **0**, а на схему $И_1$ – управляющий сигнал высокого уровня, т. е. сигнал **1**. Начиная с шестого такта и до конца работы кодера, т. е. по девятый такт включительно, управляющие сигналы, подаваемые на схемы $И_1$ и $И_2$, инвертируются, т. е. теперь на схему $И_2$ поступает управляющий сигнал **1**, а на схему $И_1$ – управляющий сигнал **0**. За девять тактов работы кодера на его выходе должна быть сформирована комбинация циклического кода, в нашем случае это будет $F(x)$ = **101101111.**

Рассмотрим работу кодера (9,5) на первом такте. Сигнал **1**, соответствующий старшему разряду (крайний символ слева) информационной кодовой комбинации $G(x)$ = **10110**, поступает на вход схемы ИЛИ и на вход сумматора $С_2$ по mod 2. Поскольку изначально все триггеры Т1, Т2, Т3, Т4 схемы кодера обнулены, то на первом такте работы кодера сигнал **0** с выхода триггера Т4 поступает на первый вход схемы $И_2$ и на второй вход сумматора $С_2$ по mod 2. С учетом того, что на первом входе сумматора $С_2$ имеется сигнал **1**, на выходе этого сумматора также формируется **1**, соответствующий сигнал при этом направляется на первый вход схемы $И_1$. На второй вход этой схемы поступает управляющий сигнал высокого уровня, т. е. сигнал **1**. В результате на выходе схемы $И_1$ формируется сигнал **1**, который следует на вход триггера Т1 и на вход сумматора $С_1$ по mod 2. Под действием тактового импульса в триггер Т1 записывается сигнал **1**, а сигнал **0**, который изначально был записан в триггере Т1, поступает на второй вход сумматора $С_1$ по mod 2. На выходе этого сумматора формируется сигнал **1**, который под действием тактового импульса записывается в триггер Т2. Соответственно, сигнал **0**, который изначально был записан в триггере Т2, под действием тактового импульса переписывается в триггер Т3. Наконец, сигнал **0**, который изначально был записан в триггере Т3, переписывается с помощью тактового импульса в триггер Т4.

Таким образом, на первом такте работы кодера циклического кода (9,5) имеют место следующие состояния триггеров: в Т1 и Т2 записан сигнал **1**, а в Т3 и Т4 – сигнал **0**.

Остается определить, какой сигнал направляется в канал связи. Обратимся к работе схем $И_2$ и ИЛИ. На первый вход схемы $И_2$ поступает управляющий сигнал низкого уровня – сигнал **0**, а на второй вход – сигнал **0** с выхода триггера Т4, изначально записанный в этом триггере. В итоге схема $И_2$ выдает на выходе сигнал **0**, который направляется на вход схемы ИЛИ. С учетом того, что на другой вход схемы ИЛИ поступил сигнал **1** информационной кодовой комбинации $G(x)$, на выходе схемы ИЛИ имеет место сигнал **1**. Он является выходным сигналом кодера циклического кода (9,5) на первом такте его работы.

Данные о состоянии триггеров Т1, Т2, Т3 и Т4, а также о выходном сигнале на выходе кодера показаны в первой строке таблицы.

Рассмотрим второй такт работы кодера циклического кода (9,5). Сигнал **0**, соответствующий второму разряду информационной кодовой комбинации $G(x)$ = **10110**, поступает на вход схемы ИЛИ и на вход сумматора $С_2$ по mod 2. На второй вход сумматора $С_2$ поступает сигнал **0**, который был записан в триггере **Т4 на предыдущем** (первом) такте работы кодера. В итоге, на выходе сумматора $С_2$ по mod 2 формируется сигнал **0**, который направляется на первый вход схемы $И_1$. Поскольку на втором входе этой схемы имеется управляющий сигнал высокого уровня – сигнал **1**, то на выходе схемы $И_1$ формируется сигнал **0**, который следует на вход триггера Т1 и на вход сумматора $С_1$ по mod 2. Под действием тактового импульса в триггер Т1 записывается сигнал **0**, а сигнал **1**, который до этого был записан в триггере Т1 **на предыдущем** (первом) такте работы кодера, поступает на второй вход сумматора $С_1$ по mod 2. В результате на выходе этого сумматора формируется сигнал **1**, который под действием тактового импульса записывается в триггер Т2. Сигнал **1**, ранее записанный в триггере Т2 на первом такте работы кодера, под действием тактового импульса переписывается в триггер Т3. Соответственно, сигнал **0**, который ранее был записан в триггере Т3 на первом такте работы кодера, переписывается с помощью тактового импульса в триггер Т4.

Таким образом, на втором такте работы кодера состояние триггеров таково: в Т1 записан сигнал **0**, в Т2 и Т3 – сигнал **1**, в Т4 – сигнал **0**.

Найдем сигнал, выдаваемый кодером в канал связи на втором такте работы кодера. На первый вход схемы $И_2$ по-прежнему поступает управляющий сигнал низкого уровня, т. е. сигнал **0**, а на второй вход – сигнал **0** с выхода триггера Т4, записанный в нем **на предыдущем** (первом) такте работы кодера. Тогда на выходе схемы $И_2$ имеет место сигнал **0**, поступающий на вход схемы ИЛИ. Поскольку при этом на другом входе схемы ИЛИ имеется сигнал **0** информационной кодовой комбинации $G(x)$, то в канал связи на втором такте работы кодера направляется сигнал **0**.

Сведения о состоянии триггеров Т1, Т2, Т3 и Т4, а также о выходном сигнале кодера на втором такте его работы представлены во второй строке таблицы.

Обратимся к работе кодера циклического кода (9,5) на третьем такте. Сигнал **1**, соответствующий третьему разряду информационной кодовой комбинации $G(x)$ = **10110**, поступает на вход схемы ИЛИ и на вход сумматора C_2 по mod 2. На второй вход сумматора C_2 по mod 2 поступает сигнал **0**, который был записан в триггере Т4 **на предыдущем** (втором) такте работы кодера. На выходе сумматора C_2 по mod 2 формируется сигнал **1**, который направляется на первый вход схемы $И_1$. На второй вход этой схемы подается управляющий сигнал высокого уровня, т. е. сигнал **1**. Поэтому на ее выходе формируется сигнал **1**, который поступает на вход триггера Т1 и на вход сумматора C_1 по mod 2. Под действием тактового импульса сигнал **1** записывается в триггер Т1, а сигнал **0**, который ранее был там записан **на предыдущем** (втором) такте работы кодера, воздействует на второй вход сумматора C_1 по mod 2. На выходе этого сумматора формируется сигнал **1**, который под воздействием тактового импульса записывается в триггер Т2. Сигнал **1**, записанный в этом триггере на втором такте работы кодера, под действием тактового импульса переписывается в триггер Т3. Соответственно, сигнал **1**, который ранее был записан в триггере Т3 на втором такте работы кодера, с помощью тактового импульса переписывается в триггер Т4.

Таким образом, на третьем такте работы кодера во всех триггерах Т1, Т2, Т3 и Т4 регистра сдвига оказываются записанными сигналы **1**.

Определим сигнал на выходе кодера (9,5) на третьем такте его работы. Для этого просмотрим сигналы на выходах схем $И_2$ и ИЛИ. На первый вход схемы $И_2$ поступает управляющий сигнал низкого уровня, сигнал **0**, а на второй вход – сигнал **0** с выхода триггера Т4, записанный там **на предыдущем** (втором) такте работы кодера. В итоге, на выходе схемы $И_2$ формируется сигнал **0**, направляемый на вход схемы ИЛИ. На другой вход схемы ИЛИ поступает сигнал **1** информационной кодовой комбинации $G(x)$. Тогда на выходе схемы ИЛИ имеет место сигнал **1**. В итоге, на третьем такте работы кодера циклического кода в канал связи направляется сигнал **1**.

Сведения о состоянии триггеров Т1, Т2, Т3 и Т4, а также о выходном сигнале кодера циклического кода (9,5) на третьем такте его работы фиксируются в третьей строке таблицы.

Работа кодера циклического кода (9,5) на четвертом и последующих тактах работы рассматривается совершенно аналогично вышеизложенному. При этом следует помнить, что при формировании сигналов на выходах сумматоров C_1 и C_2 по mod 2 и на выходе схемы $И_2$ в каждом рассматриваемом такте работы кодера должны учитываться сигналы, записанные соответственно в триггерах T1 и T4 **на предыдущем** (по отношению к рассматриваемому) такте.

Начиная с шестого такта работы кодера, на его вход, после окончания информационной последовательности $G(x)$, поступает сигнал **0** (в табл. 1 отмечено прочерком). Это позволяет сохранить логику рассмотрения работы схемы кодера такой, какой она представлена выше.

Не следует также упускать из виду, что с шестого по девятый такты работы кодера циклического кода (9,5) на соответствующий вход схемы $И_2$ подается управляющий сигнал высокого уровня, т. е. сигнал **1**, тогда как на аналогичный вход схемы $И_1$ подается управляющий сигнал низкого уровня, т. е. сигнал **0**.

По окончании заполнения всех строк и граф таблицы состояний триггеров кодера циклического кода (9,5) следует убедиться в том, что с первого по пятый такты работы кодера (включительно) в графе $F(x)$ записана информационная кодовая группа $G(x)$ (в нашем примере это 10110), а с шестого по девятый такт (включительно) – остаток от деления $R(x)$ (в нашем примере это 1111). Если это не так, то необходимо проверить правильность заполнения таблицы, начиная с первого такта.